2021 第十七屆IMC國際數學競賽複賽(台灣)
2021 Seventeenth International Mathematics Contest (Taiwan)

國
中
三
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：＿＿＿＿＿＿＿ 准考證號碼：＿＿＿＿＿＿＿ 試卷總分：＿＿＿＿＿＿＿

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	**B**	**D**	**A**	**D**	**C**	**B**	**C**	**A**
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	**3:2**	**9**	**1：1**	$\frac{21}{2}$	**1**	**4**	**9:20**	**2697**

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 小馨某日騎自行車從高雄前往奇美博物館，全程以等速前進，沒有停下來休息，在下午 2 點時已騎了全程的$\frac{1}{2}$，在下午 3 點時剩下全程的$\frac{1}{3}$，請問小馨在下午幾點時會到達奇美博物館? (A)4 點 (B)5 點 (C)6 點 (D)7 點

<解析>

$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}\div 1=\frac{1}{6}$

$(1-\frac{2}{3})\div\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\div\frac{1}{6}=2$

下午 3 點後 2 小時為下午 5 點，選 B。

2. 某國中甲、乙兩班進行籃球比賽，在沒有任何罰球的情況下，甲班投進的 2 分球及 3 分球的球數共有 6 球，乙班投進的 2 分球及 3 分球的球數共有 9 球，若甲班得分比乙班少 4 分，甲班投進的 2 分球比乙班投進的 2 分球少幾球? (A)2 (B)3 (C)4 (D)5

<解析>

假設甲班投進的 2 分球有x球，乙班投進的 2 分球有y球

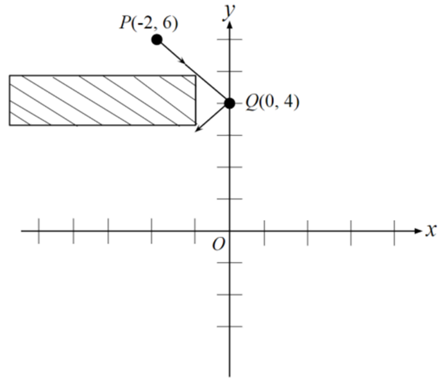
則甲班投進的 3 分球有$6-x$球，乙班投進的 3 分球有$9-y$球

$2x+3\times(6-x)+4=2y+3\cdot(9-y)$

$22-x=-y+27$

$\therefore y-x=5$，選 D。

3. 如圖，小彬玩一種射擊遊戲，遊戲螢幕上有一坐標平面，他在 P(-2, 6)的位置手持雷射槍，想要射擊圍牆另一面的 A、B、C、D 四個標靶，已知四個標靶的坐標分別為 A(-4, -1)、B($-\frac{8}{3}, \frac{4}{3}$)、C(-8, -5)、D(-24, -18)，若小彬不斷地朝 y 軸的 Q(0, 4)發射雷射光，雷射光射到 Q 點後立即反射，請問四個標靶中，有幾個標靶會被他射中? (A)1 (B)2 (C)3 (D)4



<解析>

以 y 為對稱軸，可找到 P(-2, 6)的對稱點 R(2, 6)

故反射光即為直線 QR

設直線方程式 $y = ax + b$ 將 R(2, 6)、Q(0, 4)代入

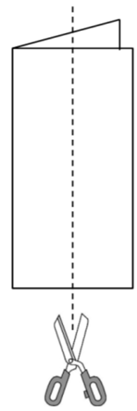
$$\begin{cases} b = 4 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$$

$\therefore a = 1$ 、 $b = 4$

∴直線方程式 $y = x + 4$ 代入 A、B、C、D 四點

$\frac{4}{3} = -\frac{8}{3} + 4$ ，只有 B 點在直線 QR 上，選 A。

4. 芊芊將邊長 12 公分的正方形紙張從中間對摺，形成兩層矩形紙張，再沿著矩形底邊的中間處把兩層紙用剪刀剪開，如此得到三個新矩形，即一個大矩形和二個小矩形，請問其中一個小矩形周長與大矩形周長的比值為何? (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{5}{6}$



<解析>

小矩形: 兩鄰邊分別為 3 公分、12 公分

周長=(3+12)×2=30

大矩形: 兩鄰邊分別為 6 公分、12 公分

周長=(6+12)×2=36

所求=$\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ ，選 D。

5. x 是實數且滿足 $x + \frac{1}{x} = 2021$ ，則 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 被 7 除的餘數為多少? (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})(x^2 - x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = (x + \frac{1}{x})[(x + \frac{1}{x})^2 - 3)] = 2021(2021^2 - 3)$$

且 2021 除以 7 餘 5，故 $5(5^2 - 3)$ 除以 7 的餘數為 5，選 C。

6. If a, b, and c are prime numbers and a+b+c+abc=99, then what is the value of $\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right|+\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right|+\left|\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right|$? (A) $\frac{2}{19}$ (B) $\frac{17}{19}$ (C) $\frac{4}{19}$ (D) $\frac{15}{19}$

<翻譯>已知 a、b、c 都是質數且 $a+b+c+abc=99$，則 $\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right|+\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right|+\left|\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right|$ 的值是多少?

<解析>

$a=2$，$b=2$，$c=19$

$\therefore \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{19}\right|+\left|\frac{1}{19}-\frac{1}{2}\right|=\frac{17}{19}$，選 B。

7. In quadrangle ABCD with $\angle ABC=\angle CDA=90^\circ$ and $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CD}=2$. The area of quadrangle ABCD is $m+\sqrt{n}$, m、n are positive integers and n can't be divided by the square of any prime number, then m + n=_________. (A)23 (B)25 (C)27 (D)29

<翻譯>在四邊形 ABCD 中，$\angle ABC=\angle CDA=90^\circ$，且 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CD}=2$。四邊形 ABCD 的面積可以表示為 $m+\sqrt{n}$，其中 m 為正整數，正整數 n 不能被任何質數的平方整除，則 m+n=?

<解析>

根據畢氏定理 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2$，$\overline{AD}=\sqrt{3^2+4^2-2^2}=\sqrt{21}$

$m+\sqrt{n}=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{21}=6+\sqrt{21}$，m + n=27，選 C。

8. 已知關於 x 的方程 $2a(3x+2)-1=(2b+1)x$ 有無數個解，則 a+b=?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$

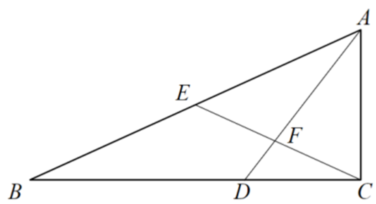
<解析>

原式 ➔ $(6a-2b-1)x+4a-1=0$，得知 $6a-2b-1=0$ 且 $4a-1=0$

$a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{4}$，則 $a+b=\frac{1}{2}$，選 A。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 如圖，△ABC，$\angle C=90^\circ$，D 為 $\overline{BC}$ 上一點，E 為 $\overline{AB}$ 中點，且 $\overline{AD}$、$\overline{CE}$ 交於一點 F，若 $\overline{AD}=\overline{BD}$，則 $\angle DFE:\angle AEF=$________。



<解析>

∵E 為直角三角形之外心

$\therefore \overline{AE}=\overline{EC}=\overline{EB} \rightarrow \angle B=\angle BCE$

設 $\angle B=x^\circ$，$\therefore \angle AEF=\angle B+\angle BCE=2x^\circ$

$\overline{AD}=\overline{BD}$，$\therefore \angle BAD=\angle B=x^\circ$

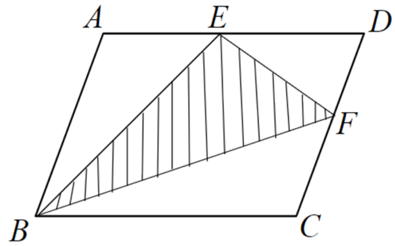
$\angle DFE$ 為△AEF 的外角

$\therefore \angle DFE=\angle BAD+\angle AEF=x^\circ+2x^\circ=3x^\circ$

$\therefore \angle DFE:\angle AEF=3:2$

2. 如右圖，平行四邊形 ABCD 面積為 24，E 為$\overline{AD}$中點，F 為$\overline{CD}$中點，則△BEF 面積 =______。

<解析>



$\overline{EF}:\overline{AC}=1:2$

∴△DEF: △DAC=1:4

△DEF=(24÷2)÷4=3

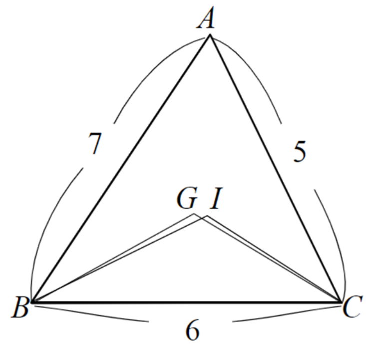
△ABE:△DEF=1:2→△ABE=6

△BCF:△DEF=1:2→△BCF=6

則△BEF=24-3-6-6=9

3. 如右圖，△ABC 中，$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=5$，若 I 點為△ABC 的內心，G 點為△ABC 的重心，則△BCI 的面積：△BCG 的面積=_______ 。

<解析>



∵I 點為△ABC 的內心

∴△BCI 的面積=$\dfrac{6}{5+6+7}$×△ABC 的面積=$\dfrac{1}{3}$△ABC 的面積

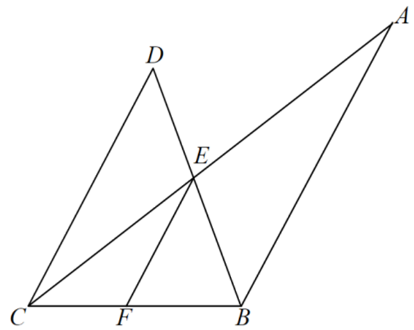
∵G 點為△ABC 的重心

∴△BCG 的面積=$\dfrac{1}{3}$△ABC 的面積

∴△BCI 的面積：△BCG 的面積=1:1

4. 如圖，$\overline{AB}//\overline{EF}//\overline{CD}$，E 為$\overline{AC}$與$\overline{BD}$的交點，B、F、C 三點共線，若$\overline{CF}=3$，$\overline{BF}=4$，$\overline{AB}=14$，試求$\overline{CD}=$________ 。

<解析>



∵ $\overline{EF}//\overline{AB}$

∴ $\overline{EF}:\overline{AB}=\overline{CF}:\overline{CB}$ ➔ $\overline{EF}:14=3:(3+4)$

∴ $\overline{EF}=6$， 又 $\overline{EF}//\overline{CD}$

∴ $\overline{EF}:\overline{CD}=\overline{BF}:\overline{CB}$ ➔ $6:\overline{CD}=4:(3+4)$

∴ $\overline{CD}=\dfrac{21}{2}$

5. Subtract 100 from its $\dfrac{1}{2}$, and then subtract $\dfrac{1}{3}$ of the remaining…. etc. Until $\dfrac{1}{100}$ of the remaining is subtracted. What is the final number?

<翻譯>將 100 減去它的$\dfrac{1}{2}$，再減去剩下的$\dfrac{1}{3}$，.....，以此類推，直到減去剩下的$\dfrac{1}{100}$，最後得到的數是______ 。

<解析>

$$100\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot\ldots\ldots\cdot(1-\frac{1}{100})=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{99}{100}=100\cdot\frac{1}{100}=1$$ 。

6. 整數 p、q 滿足 $p+q=21$，$x^2+px+q=0$ 有整數根，則滿足這樣條件的整數對(p,q)的個數為______。

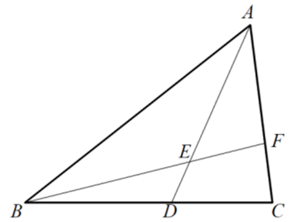
<解析>

$\triangle = p^2-4q=n^2$ ➔ $(p+2)^2-n^2=88=2^3\times 11$，$(p+2+n)$ 和 $(p+2-n)$ 為同奇偶，乘積為偶數

故它們均為偶數，因此 $\frac{(p+2+n)}{2}\frac{(p+2-n)}{2}=11\times 2$，22 有 $\frac{2^3}{2}=4$，有 4 個。

7. 如右圖，$\overline{BD}:\overline{CD}=3:2$，$\overline{AE}:\overline{ED}=3:1$，則△ABE：△ABC=______。

<解析>



①$\Delta ABD:\Delta ABC=\overline{BD}:\overline{BC}=3:5$

②$\Delta ABE:\Delta ABD=\overline{AE}:\overline{AD}=3:4$

$\therefore \Delta ABE:\Delta ABD:\Delta ABC=9:12:20$

$\therefore \Delta ABE:\Delta ABC=9:20$。

8. 規定一自然數能表示成兩個自然數的平方差，則這個自然數稱為”智慧數”，例如 $2^2-1^2=3$，$3^2-2^2=5$，$4^2-3^2=7$，$3^2-1^2=8$，…..，在自然數列中，從 3 開始，第 2021 個智慧數是_______。

<解析>

3	5	7	8	9	11	12	13	15	16
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}

$a_2=a_3\times 0+2=5=4\times 1+1$

$a_5=a_3\times 1+2=9=4\times 2+1$

$a_8=a_3\times 2+2=13=4\times 3+1$

………..

$a_{2021}=a_3\times 673+2=4\times 674+1=2697$。

三、計算題(10 分/10 分，共 20 分) ※未寫計算過程不予計分

1. 一地產公司有 80 棟公寓住宅，當租金每棟每月 3000 元時，所有住宅均出租；每月租金每增 100 元，則平均多一住宅不能租出，每租出之房屋每月需養護費 300 元，為求最高利潤應如何改訂租金?

<解析>

令每棟每月租金增加 100x 元

則總利潤: $y=(3000+100x)(80-x)-300(80-x)$

原式: $y=-100x^2+5000x+240000-24000+300x$

$=-100x^2+5300x+216000$

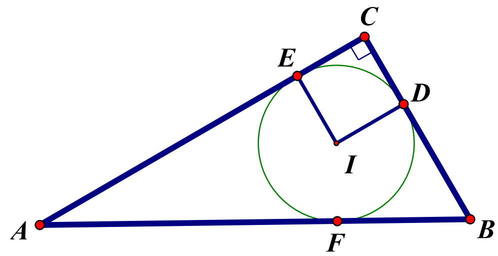
$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{5300}{-200}=26\frac{1}{2}$

當 $x=26$ 或 $x=27$ ➔當租金為 5600 元或 5700 元

答:租金為 5600 元或 5700 元

2. 如圖，設 I 為 Rt△ABC 的內心，$\angle C=90°$，I 在 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 邊上射影分別為 D、E、F，內切圓半徑為 r，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，求證: △ABC 面積= $\overline{AF}\times\overline{FB}$

<證明>



∵D、E、F 為切點

$\therefore \overline{AE}=\overline{AF}$、$\overline{CE}=\overline{CD}$、$\overline{BD}=\overline{BF}$

四邊形 IECD 中

∵ $\overline{IE}=\overline{ID}=r$ 且 $\angle C=\angle CEI=\angle CDI=90°$

∴四邊形 IECD 為正方形

$\overline{AC}\times\overline{BC}=2\times\Delta ABC$

$(\overline{AF}+r)\times(\overline{BF}+r)=2\times\Delta ABC$

$\rightarrow \overline{AF}\times\overline{BF}+r(\overline{AF}+\overline{BF})+r^2=2\times\Delta ABC$

$\rightarrow \overline{AF}\times\overline{BF}+r\overline{AB}+r\times\dfrac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}=2\times\Delta ABC$

$\rightarrow \overline{AF}\times\overline{BF}+r\times(\overline{AB}+\dfrac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2})=2\times\Delta ABC$

$\rightarrow \overline{AF}\times\overline{BF}+r\times\dfrac{\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AB}}{2}=2\times\Delta ABC$

$\rightarrow \overline{AF}\times\overline{BF}+\Delta ABC=2\times\Delta ABC$

$\rightarrow \overline{AF}\times\overline{BF}=\Delta ABC$