2021 第十七屆IMC國際數學競賽複賽(台灣)
2021 Seventeenth International Mathematics Contest (Taiwan)

國

中

二

年

級

試

卷

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：＿＿＿＿＿＿＿ 准考證號碼：＿＿＿＿＿＿＿ 試卷總分：＿＿＿＿＿＿＿

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！ ◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不計算成績！								
選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	**C**	**D**	**C**	**A**	**C**	**B**	**B**	**C**
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	**1603**	**24**	**5**	**121**	**45**	$\frac{1}{5}$	**2697**	**9**

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 某洗衣乳瓶上標示有正確的使用方式如下：
一次使用量為瓶蓋容量的$\frac{1}{3}$，小菲買了一瓶回家使用，誤將$\frac{1}{3}$看成了$\frac{1}{2}$，使用了 12 次後才發現使用方法錯誤，此時洗衣乳已用了$\frac{1}{3}$。若往後依正確的方式使用，還可以使用幾次? (A)12 次 (B)24 次 (C)36 次 (D)48 次

<解析>

假設瓶蓋容量是x，則小菲用去了$\frac{1}{2}x\cdot 12=6x$

$6x\div\frac{1}{3}=18x$ ………洗衣乳的原容量

$18x\times\frac{2}{3}=12x$ ……..洗衣乳剩下的容量

$12x\div\frac{1}{3}x=36$ (次)，選 C。

2. 名偵探柯南在案發現場發現了一個懸疑的二位數用來暗示犯人的年紀，二位數中十位數字是 4，個位數字模糊不清，已知此數的平方比此數的 45 倍多 94，則下列敘述何者正確? (A)犯人年紀是偶數 (B)犯人年紀必小於 45 歲 (C)犯人年紀能有兩種答案 (D)犯人年紀必是質數

<解析>

假設個位數為x，十位數是 4，此數為$40+x$

$(40+x)^2=(40+x)\times 45+94$

$1600+80x+x^2=1800+45x+94$

$x^2+35x-294=0$

$(x-7)(x+42)=0$

$x=7$ 或 $x=-42$ (不合)

故犯人年紀為 47 歲，選 D。

3. 中華職棒舉辦棒球比賽，積分規則與獎金分配如表所示，當比賽進行到每隊均比賽到15 場時，巧虎隊共獲得積分 19 分，而每位隊員得獎金 57500 元，則巧虎隊平手的有幾場? (A)10 (B)7 (C)4 (D)1

單場 / 分配	勝	平手	負
積分	3	1	0
獎金(元/人)	7500	3500	1000

<解析>

假設勝 x 場，負 y 場，平手 $15-(x+y)$ 場

$$\begin{cases} 3x+15-(x+y)=19 \\ 7500x+3500[15-(x+y)]+1000y=57500 \end{cases}$$

$\therefore x=5$ ， $y=6$

平手=15-(5+6)=4，選 C。

4. 已知等差級數 $a_1+a_2+a_3+.....+a_n$ 中，若 $a_8-a_4=24$，$a_n-a_5=138$，且該級數總和為 2772，則 a_1=? (A)18 (B)12 (C)6 (D)-10

<解析>

假設公差為 d

$\because a_8-a_4=(a_1+7d)-(a_1+3d)=24$ ， $4d=24$ ， $d=6$

且 $a_n-a_5=[a_1+(n-1)\times 6]-(a_1+4\times 6)=138$ ， $n=28$

$\therefore S_{28}=2772$ ， $S_{28}=\dfrac{28[2a_1+(28-1)\times 6]}{2}=2772$ ， $a_1=18$

選 A。

5. If $\sqrt{a^2+2005}$ is positive integer, then what is the sum of all the possible values of a which satisfies the condition? (a must be positive integer) (A)396 (B)1002 (C)1200 (D)2004

<翻譯> 若 $\sqrt{a^2+2005}$ 是正整數，則所求滿足條件正整數 a 的和為何?

<解析>

$\sqrt{a^2+2005}=b \to a^2+2005=b^2 \to b^2-a^2=2005$

$(b+a)(b-a)=2005=2005\times 1=401\times 5$

$\begin{cases} b+a=2005 \\ b-a=1 \end{cases} \rightarrow (a,b)=(1002,1003)$ 或 $\begin{cases} b+a=401 \\ b-a=5 \end{cases} \rightarrow (a,b)=(198,203)$

∴滿足正整數 a 的和=1002+198=1200，選 C。

6. Subtract 100 from its $\frac{1}{2}$, and then subtract $\frac{1}{3}$ of the remaining…. etc. Until $\frac{1}{100}$ of the remaining is subtracted. What is the final number? (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

<翻譯>將 100 減去它的 $\frac{1}{2}$ ，再減去剩下的 $\frac{1}{3}$ ，…..，以此類推，直到減去剩下的 $\frac{1}{100}$ ，最後得到的數是______。

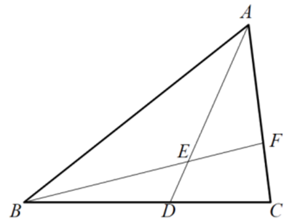
<解析>

$100\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot......\cdot(1-\frac{1}{100})=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot......\cdot\frac{99}{100}=100\cdot\frac{1}{100}=1$ 。

選 B。

7. 如右圖，$\overline{BD}:\overline{CD}=3:2$，$\overline{AE}:\overline{ED}=3:1$，則△ABE：△ABC=______ 。

(A)3:10 (B)9:20 (C)8:15 (D)7:18



<解析>

①$\Delta ABD:\Delta ABC=\overline{BD}:\overline{BC}=3:5$

②$\Delta ABE:\Delta ABD=\overline{AE}:\overline{AD}=3:4$

$\therefore \Delta ABE:\Delta ABD:\Delta ABC=9:12:20$

$\therefore \Delta ABE:\Delta ABC=9:20$，選 B。

8. 已知實數 a、b、c 滿足$(a+b)(b+c)(c+a)=0$且$abc<0$，則$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$的值是_______ 。

(A)-1 (B)0 (C)1 (D)2

<解析>

(1)a+b=0 或 b+c=0 或 c+a=0→a、b、c 至少 2 個互為相反數

(2)abc<0→a、b、c 必為 2 正 1 負 $\therefore \frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=1$，選 C。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 小珍和阿德做加法運算，小珍將加數後面多寫 1 個 0，所得到的和為 15823，阿德將加數後面少寫 1 個 0，所得到的和為 181，則正確的和應為______ 。

<解析>

假設被加數為x，加數為y

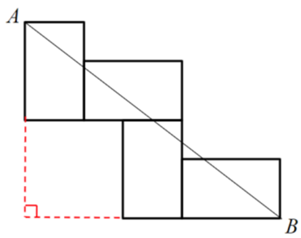
$$\begin{cases} x+10y=15823 \\ x+0.1y=181 \end{cases}$$

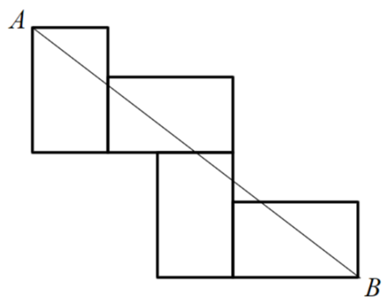
$\therefore 9.9y=15642$，$y=1580$

$x+1580\times 10=15823$，$x=23$

$\therefore x+y=1580+23=1603$

2. 如圖，四個大小相同的長方形彼此不重疊但緊靠在一起，且任意兩相鄰直角邊均成一直線，若每個長方形的長比寬多 2，$\overline{AB}=20$，則每個長方形的面積為_____ 。





<解析>

假設長方形的長為x，寬為$(x-2)$

$(2x)^2+(2x+x-2)^2=20^2$

$4x^2+9x^2-12x+4=400$

$13x^2-12x-396=0$

$(13x+66)(x-6)=0$

$\therefore x=6$或$x=-\frac{66}{13}$(不合)

長方形面積=$6\times 4=24$

3. In $\triangle$ABC, point M, N, P are the midpoint of $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ respectively, if $S_{\triangle ABC}=20$, then what is the area of $\triangle$MNP? ________.

<翻譯>在三角形ABC中，點M, N, P分別是三角形三邊$\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$的中點，如果三角形ABC的面積是20，則三角形MNP的面積為________。

<解析>

因為 M、N、P 為中點，把原三角形分成面積相等的 4 塊

故△MNP=△ABC×$\frac{1}{4}$=5。

4. 品冠偕一群好友辦網路直播，他們發現 2 秒的直播，可以吸引到 25 次按讚；直播 3 秒可以吸引到 37 次按讚；.......，且直播時間與按讚次數間成直線函數關係，如下表：

網路直播時間 x(秒)	2	3	5	10	.....
按讚次數 y(次)	25	37	61	?	.....

若品冠直播時間 10 秒，則可以吸引按讚次數為______次。

<解析>

∵(2, 25)、(3, 37)代入 $y=ax+b$

$$\begin{cases}25=2a+b\\37=3a+b\end{cases}$$

∴ $a=12$，$b=1$

∴ $y=12x+1$代入 $x=10$

$y=12\times10+1=121$，按讚次數為 121 次。

5. 若$a+b+c=11$，$ab+bc+ac=38$，則$a^2+b^2+c^2=$______.

<解析>

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=11^2-2\times38=121-76=45$$

6. 小宗和阿華及其他 4 名同學共 6 人，擔任指考考場服務人員，三天考試日，每日從尚未當過的同學中，選出兩位輪值，則小宗和阿華同一天擔任考場服務人員的機率為何________。

<解析>

$$\frac{3\times C_2^2C_2^4C_2^2}{C_2^6C_2^4C_2^2}=\frac{1}{5}$$ 。

7. 規定一自然數能表示成兩個自然數的平方差，則這個自然數稱為"智慧數"，例如 $2^2-1^2=3$，$3^2-2^2=5$，$4^2-3^2=7$，$3^2-1^2=8$，.....，在自然數列中，從 3 開始，第 2021 個智慧數是_______。

<解析>

3	5	7	8	9	11	12	13	15	16
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}

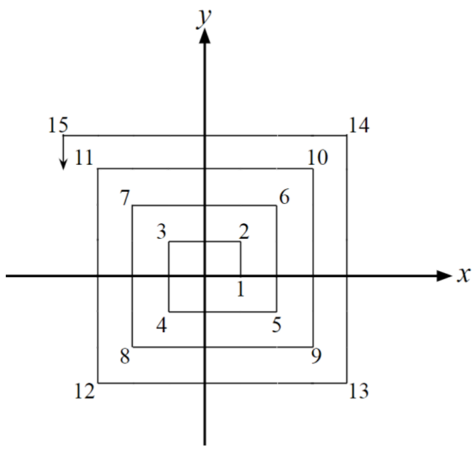
$a_2 = a_3 \times 0 + 2 = 5 = 4 \times 1 + 1$
$a_5 = a_3 \times 1 + 2 = 9 = 4 \times 2 + 1$
$a_8 = a_3 \times 2 + 2 = 13 = 4 \times 3 + 1$
………..
$a_{2021} = a_3 \times 673 + 2 = 4 \times 674 + 1 = 2697$ 。

8. 已知任何一個單位分數$\frac{1}{n}$，都可以寫成兩個單位分數的和，每一個滿足$\frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$($n$、$p$、$q$都是正整數)的有序正整數對($p$，$q$)稱為$\frac{1}{n}$的一個”分解”，則$\frac{1}{6}$共有____種不同的”分解”。

<解析>
$\frac{1}{6} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ➔ $pq = 6p + 6q$，即$(p-6)(q-6) = 36 = 2^2 \times 3^2$，共有$(1+2)^2 = 9$個公因數，有 9 種。

三、計算題(10 分/10 分，共 20 分) ※未寫計算過程不予計分

1. 將正整數依右圖之方式排列在坐標平面的格子點上，排列的位置及次序如箭頭所示，其中相鄰二平行線間之距離為 1，試求 1001 這個數所在的位置之坐標。



<解析>
觀察第三象限的數: 4, 8, 12,……都是 4 的倍數
而位於第四象限的數: 5, 9, 13…..都是 4k+1 的形式
又繞一圈需要 4 個數，所以 4k+1(k=1, 2, 3,4,…)的數必在第四象限。
$5 = 4k+1$，$k=1$位置在(2, -1)
$9 = 4k+1$，$k=2$位置在(3, -2)
$11 = 4k+1$，$k=3$位置在(4, -3)
則$4k+1$的數，其位置在(k+1, -k)，1001=4k+1，其中 k=250
令 k=250，即得(k+1, -k)=(251, -250)
答: (251, -250)

2. 試問是否有正整數各個數字和為 11 的完全平方數? 若沒有，試證之；若有，試求其最小數。

<解析>
$n \in N$
①$n = 3k$ ($k = 1, 2, \ldots\ldots$)$\rightarrow n^2 = 9k^2$，$9k^2 \div 3$餘 0
②$n = 3k+1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$)$\rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1$，$(9k^2 + 6k + 1) \div 3$餘 1
③$n = 3k+2$ ($k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$)$\rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4$，$(9k^2 + 12k + 4) \div 3$餘 1
∴完全平方數÷3→餘 0 或 1

設 n 的各個數字和為 11
11÷3 餘 2➔n 不可能是完全平方數。