

2021 第十七屆  國際數學競賽複賽(台灣)
2021 Seventeenth International Mathematics Contest (Taiwan)

國
中
一
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：_____ 准考證號碼：_____ 試卷總分：_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	A	B	B	C	B	A
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	2056	450	400	1125	119988	1200	23	8

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 已知 $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{10}$ ，則下列敘述何者錯誤？

(A) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{9}{10} = 8 - A$ (B) $\frac{4}{3} + \frac{6}{4} + \frac{8}{5} + \dots + \frac{18}{10} = 16 - A$

(C) $\frac{5}{3} + \frac{7}{4} + \frac{9}{5} + \dots + \frac{19}{10} = 16 - A$ (D) $-\frac{1}{3} - \frac{2}{4} - \frac{3}{5} - \dots - \frac{8}{10} = 2A - 8$

<解析>

$$\frac{4}{3} + \frac{6}{4} + \frac{8}{5} + \dots + \frac{18}{10} = 2\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{9}{10}\right) = 2\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{10}\right)\right]$$

$$= 2\left[8 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{10}\right)\right] = 2(8 - A) = 16 - 2A, \text{ 選 B。}$$

2. 把點數為 3、5、7、Q(Q 表示 12 點)的四張撲克牌發給甲、乙、丙、丁四人，每人一張，每人按牌面點數各自記分，然後收回洗牌，再重新分給四人，每人一張並記分，若干次後，四人累計的分數分別為 18 分、20 分、17 分、26 分。已知得 18 分的甲最後一次拿到 Q，則甲在第一次得到幾分？(A)3 (B)5 (C)7 (D)Q

<解析>

$$(18+20+17+26) \div (3+5+7+12) = 3$$

$$18 - 3 = 15, 15 = 3 + 12$$

甲第一次得 3 分，選 A。

3. 海盜船船長傑克與船員在加勒比海某不知名小島上尋獲一箱金幣；若每個海盜分 40 枚金幣，則會剩下 10 枚金幣；若每個海盜分 35 枚金幣，則會剩下 115 枚金幣。已知一枚金幣的市場價格行情為 15000 美元，且 1 美元可兌換新台幣 32 元，若將這箱金幣的總價值換算成新台幣，可用科學記號 $a \times 10^b$ 元來表示，則下列何者正確？

(A) $4 < a < 5$ (B) $5 < a < 6$ (C) $b = 9$ (D) $b = 10$

<解析>

設海盜人數有 x 人

$$40x + 10 = 35x + 115$$

$$5x = 105, x = 21$$

$$\text{金幣總數} = 21 \times 40 + 10 = 850 \text{ (枚)}$$

$$850 \times 15000 \times 32 = 4.08 \times 10^8$$

$\therefore a=4.08$ ， $b=8$ ，選 A。

4. 已知甲 $=2^a \times 9 \times 25$ ，若 72 是甲的因數，但 80 不是甲的因數，求 $a=?$ (A)2 (B)3 (C)4 (D)5

<解析>

$$\text{甲} = 2^a \times 3^2 \times 5^2$$

$$72 = 2^3 \times 3^2, \quad 80 = 2^4 \times 5$$

$\therefore 72$ 是甲的因數， $a \geq 3$

且 80 不是甲的因數， $4 > a$

故 $a=3$ ，選 B。

5. If $a, b,$ and c are prime numbers and $a+b+c+abc=99$, then what is the value of

$$\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| + \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right| ? \text{(A) } \frac{2}{19} \text{ (B) } \frac{17}{19} \text{ (C) } \frac{4}{19} \text{ (D) } \frac{15}{19}$$

<翻譯>已知 a, b, c 都是質數且 $a+b+c+abc=99$ ，則 $\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| + \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right|$ 的值是多少？

<解析>

$$a=2, \quad b=2, \quad c=19$$

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{19} \right| + \left| \frac{1}{19} - \frac{1}{2} \right| = \frac{17}{19}$$

選 B。

6. If $a, b,$ and c are real numbers and satisfied $(a+b)(b+c)(c+a)=0$, $abc < 0$, then what is the value of $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$? (A)0 (B)-1 (C)1 (D)-3

已知實數 a, b, c 滿足 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ 且 $abc < 0$ ，則 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$ 的值是多少？

<解析>

(1) $a+b=0$ 或 $b+c=0$ 或 $c+a=0 \rightarrow a, b, c$ 至少 2 個互為相反數

(2) $abc < 0 \rightarrow a, b, c$ 必為 2 正 1 負 $\therefore \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} = 1$ ，選 C。

7. 小宗和阿華及其他 4 名同學共 6 人，擔任指考考場服務人員，三天考試日，每日從尚未當過的同學中，選出兩位輪值，則小宗和阿華同一天擔任考場服務人員的機率為何？

$$\text{(A) } \frac{1}{4} \quad \text{(B) } \frac{1}{5} \quad \text{(C) } \frac{1}{6} \quad \text{(D) } \frac{1}{8}$$

<解析>

$$\frac{3 \times C_2^2 C_2^2 C_2^2}{C_2^6 C_2^4 C_2^2} = \frac{1}{5}, \quad \text{選 B。}$$

8. Throw the dice twice in a row, and the numbers of points that appear are a and b . What is the probability of $a^2b > 10$? (A) 75% (B) 80% (C) 70% (D) 85%

<翻譯>連續投擲骰子兩次，出現的點數依次為 a 和 b 。則 $a^2b > 10$ 的機率是多少？

<解析>

$$6 \times 6 = 36$$

當 $a=1$ ， $b > 10$ (不合)；當 $a=2$ ， $b=3、4、5、6$ (4 種)

當 $a=3$ ， $b=2、3、4、5、6$ (5 種)；當 $a=4、5、6$ ， $b=1、2、3、4、5、6$ (18 種)

$$4 + 5 + 18 = 27$$

故機率 = $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$ ，選 A。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 已知方程式 $\frac{105}{2016}x + 3 = 23$ ，試計算 $\frac{105}{1008}(x + 1008) + 1911 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

<解析>

$$\frac{105}{2016}x + 3 = 23 \rightarrow \frac{105}{2016}x = 20$$

$$\therefore \frac{105}{1008}(x + 1008) + 1911 = \frac{105}{1008}x + 105 + 1911 = \frac{105}{2016}x \times 2 + 2016 = 20 \times 2 + 2016 = 2056$$

2. 元元實施減重計畫，她預定每餐攝取 270 大卡、蛋白質 235 公克，右表是其中一餐的營養價值表，則元元該餐所進食的麵包與蘋果汁共 $\underline{\hspace{2cm}}$ 公克。

<解析>

假設麵包 $100x$ 公克，蘋果汁 $100y$ 公克

$$\begin{cases} 90x + 36y = 270 \\ 80x + 30y = 235 \end{cases}$$

$$\text{得 } x = 2, y = \frac{5}{2}$$

$$\text{所求} = 100 \times 2 + 100 \times \frac{5}{2} = 450 \text{ 公克。}$$

食物 (每 100 公克)	熱量 (大卡)	蛋白質 (公克)
麵包	90	80
蘋果汁	36	30

3. 學校訂購校服，已知每種衣服的價錢和允許穿著時間為：

A 套裝(含上衣、褲子)	整體購買，可分開穿	200 元	週一、週三
B1 上衣	可和其他褲子自由搭配	115 元	週二至週五
B2 褲子	可和其他上衣自由搭配	90 元	週二、週四、週五
C1 上衣	可和其他褲子自由搭配	105 元	週一、週三
C2 褲子	可和其他上衣自由搭配	90 元	週一、週三、週五
D 上衣	可和其他褲子自由搭配	55 元	週五

一周中每種衣服搭配可最多連著穿兩天，問若使花費最少，需要支付 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元。

<解析>

選擇 B2 褲子和 C2 褲子($90+90=180$)，可以週一至週五輪流替換穿
選擇 C1 衣服和 B1 衣服($115+105=220$)，可以週一至週五輪流替換穿
最少花費 $180+220=400$ 元。

4. 妙思與妙麗兩姊妹一起去游泳，妙思帶了一袋十元硬幣，妙麗帶了一袋五元硬幣，付錢時各自使用自己袋中的硬幣，且兩袋的硬幣個數相等。若妙思每次游泳需花 50 元買全票，妹妹妙麗每次需花 30 元買半票，一同游泳若干次後，妙思發現袋中還有 15 枚硬幣，但是妙麗的袋中只剩下 3 枚硬幣，請問姊妹兩人原來共有_____元。

<解析>

假設兩人一起游泳 x 次

$$\frac{50}{10}x + 15 = \frac{30}{5}x + 3, \quad 5x + 15 = 6x + 3, \quad x = 12$$

妙麗(妙思)原有硬幣數 = $5 \times 12 + 15 = 75$

妙麗(妙思)共有 = $(5+10) \times 75 = 1125$ (元)。

5. 用 3、4、5、6 這四個數排成的所有四位數，這些四位數的和為_____。

<解析>

$$(3333+4444+5555+6666) \times 6 = 119988。$$

6. If $\sqrt{a^2 + 2005}$ is positive integer, then what is the sum of all the possible values of a which satisfies the condition? (a must be positive integer) _____.

<翻譯>若 $\sqrt{a^2 + 2005}$ 是正整數，則所求滿足條件正整數 a 的和為何?

<解析>

$$\sqrt{a^2 + 2005} = b \rightarrow a^2 + 2005 = b^2 \rightarrow b^2 - a^2 = 2005$$

$$(b+a)(b-a) = 2005 = 2005 \times 1 = 401 \times 5$$

$$\begin{cases} b+a=2005 \\ b-a=1 \end{cases} \rightarrow (a, b) = (1002, 1003) \quad \text{或} \quad \begin{cases} b+a=401 \\ b-a=5 \end{cases} \rightarrow (a, b) = (198, 203)$$

滿足正整數 a 的和 = $1002 + 198 = 1200$

7. 如果把年、月、日的數字依序排列求和等於 10，我們就稱這個數為”滿十日期”，如 20210104 就是一個”滿十日期”，那麼在 2021 年這一整年，是”滿十日期”有_____個。

<解析>

$$10 - 2 - 2 - 1 = 5, \quad \text{月} + \text{日} = 5$$

(0104)(1004) (0113) (0131) (0122)、(0212) (0221) (0203)、(0311)(0302)(0320)

(0410) (0401)、(1013)(1031)(1022)、(1130) (1112) (1121) (1103)、(1211) (1220)(1202)

共 23 個。

8. 在 2020 的正因數中，偶數有_____個。

<解析>

$$2020 = 1 \times 2020 = 2 \times 1010 = 4 \times 505 = 5 \times 404 = 10 \times 202 = 20 \times 101$$

$$\text{另解: } 2020 = 2^2 \times 5 \times 101, \quad (2^1 + 2^2)(5^0 + 5^1)(101^0 + 101^1) \rightarrow 2 \times 2 \times 2 = 8$$

偶數有 8 個。

三、計算題(10 分/10 分，共 20 分) ※未寫計算過程不予計分

1. 坐標軸上 $A(3, 0)$ 、 $B(0, 2)$ ， P 在第一象限上且四邊形 $OAPB$ 面積=6，若 P 在直線上移動且直線 L 與 x 軸、 y 軸相交於 C 、 D ，求：

①直線 L 之方程式 ②求 C 、 D 二點坐標

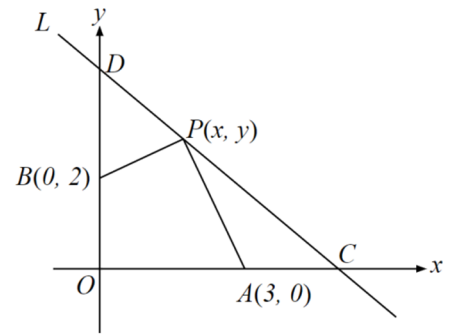
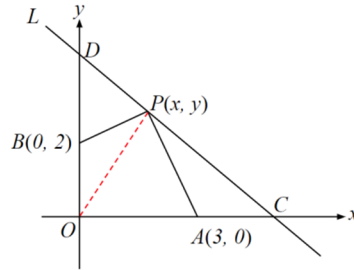
<解析>

①連接 \overline{OP}

$\therefore \triangle BPO + \triangle OPA = \text{四邊形 } OAPB$

$$\therefore \frac{2 \times x}{2} + \frac{3 \times y}{2} = 6$$

直線方程式 $L = 2x + 3y = 12$



②

$$\therefore 2x + 3y = 12$$

$$\therefore C(6, 0), D(0, 4)$$

答：① $2x + 3y = 12$ ② $C(6, 0), D(0, 4)$

2. 從 1、2、3、4、.....、20、21 中，至少任取多少個數，才能使得其中一定有兩個數，大數是小數的倍數？

<解析>

把 11、12、13、.....、20、21 這 11 個數中，沒有一個數是另一個數的倍數
故分成 11 組：

(1、2、4、8、16)，(3、6、12)，(5、10、20)，(7、14)，(9、18)

(11)，(13)，(15)，(17)，(19)，(21)

根據抽屜原理一定有兩數取自同一組，符合大數是小數的倍數
至少任取 12 個才能滿足條件。