2021 第十七屆IMC國際數學競賽複賽(台灣)
2021 Seventeenth International Mathematics Contest (Taiwan)

高中二年級試卷

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：______________ 准考證號碼：______________ 試卷總分：______________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	**B**	**B**	**A**	**D**	**B**	**B**	**A**	**B**
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	**210**	$6\sqrt{2}$	**1**	**-20**	**10**	$\frac{n(2n^2-3n+7)}{6}$	$\frac{13}{4}$	$2\sqrt{2}-1$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 甲、乙、丙三個人同時玩「剪刀、石頭、布」的遊戲一次，求沒人得勝(不分勝負)的機率是 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{9}$

<解析>

$\frac{C_1^3\cdot 3}{3^3}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$，選 B。

2. 方程式$-x=2^x-2$有多少個實數解? (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

<解析>

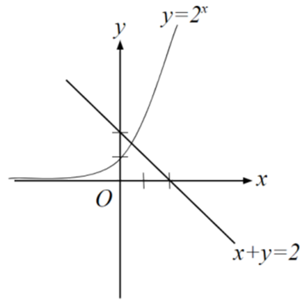
原式: $2-x=2^x$

令 $y=2^x$ 和 $y=2-x$

當 $y=2^x$，畫出過(1, 2)和(0, 1)之曲線

當 $y=2-x$，畫出過(2, 0)和(0, 2)之直線

兩圖形交於一點➔有一個實數解，選 B。



3. If $2\le x\le 5$, find the maximum value m and minimum value n of $y=2x^2-12x+15$, then $m\cdot n$=?
(A)-15 (B)-12 (C)-9 (D)-6

<翻譯>設$2\le x\le 5$，求$y=2x^2-12x+15$的最大值m與最小值n，則$m\cdot n$=?
(A)-15 (B)-12 (C)-9 (D)-6

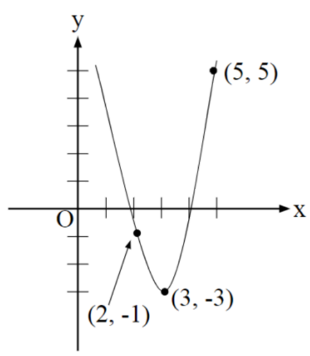
<解析>

$y=2x^2-12x+15=2(x-3)^2+15-18=2(x-3)^2-3$

①當 x=5 時，y 有最大值 5

②當 x=3 時，y 有最小值-3

$\therefore m\cdot n=5\cdot(-3)=-15$，選 A。



4. 已知 $f(x)=4x^4-8x^3-15x^2+13x+49$，則 $f(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})$=?

(A)20 (B)30 (C)40 (D)50

<解析>

令 $x=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ ➔ $2x-3=2\sqrt{2}$，$(2x-3)^2=8$，$4x^2-12x+1=0$

利用除法 $f(x)=(4x^2-12x+1)(x^2+x-1)+50$

$\therefore f(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})=0+50=50$，選 D。

5. 已知 $|\overrightarrow{a}|=2|\overrightarrow{b}|$，$|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|=\sqrt{3}|\overrightarrow{a}|$，設 θ 為 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 的夾角，則 $\cos\theta$=?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

<解析>

$|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|^2=(\sqrt{3}|\overrightarrow{a}|)^2$

$\rightarrow |\overrightarrow{a}|^2-4\cdot\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4|\overrightarrow{b}|^2=3|\overrightarrow{a}|^2$

$\rightarrow 2|\overrightarrow{a}|^2+4\cdot\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-4|\overrightarrow{b}|^2=0$

$\rightarrow 2|\overrightarrow{a}|^2+4\cdot|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\cos\theta-4|\overrightarrow{b}|^2=0$

$\rightarrow 2(2|\overrightarrow{b}|)^2+4\cdot|2\overrightarrow{b}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\cos\theta-4|\overrightarrow{b}|^2=0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{1}{2}$

6. We know that $[x]$ represents the maximum value of whole number that is not exceed x. If x_0 is the real root of equation $[x]^x=50$, then what is the value of x_0?

(A) $2<x_0<3$ (B) $3<x_0<4$ (C) $4<x_0<5$ (D) $5<x_0<6$

<翻譯>已知 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數，若 x_0 是方程式 $[x]^x=50$ 的實數根，則 (A) $2<x_0<3$ (B) $3<x_0<4$ (C) $4<x_0<5$ (D) $5<x_0<6$

<解析>

令 $f(x)=[x]^x$

$[x]=0$ 時，$0<x<1\rightarrow f(x)=0$

$[x]=1$ 時，$1\le x<2\rightarrow f(x)=1$

$[x]=2$ 時，$2\le x<3\rightarrow f(x)=2^x\rightarrow 2^2\le f(x)<2^3$，$4\le f(x)<8$

$[x]=3$ 時，$3\le x<4\rightarrow f(x)=3^x\rightarrow 3^3\le f(x)<3^4$，$27\le f(x)<81$

選 B。

7. 比較 $a=\sqrt{10}-\sqrt{7}$ ，$b=\sqrt{6}-\sqrt{3}$ ，$c=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ 的大小為何?
   (A) $a<b<c$ (B) $b<c<a$ (C) $a<c<b$ (D) $c<b<a$

<解析>

$\because \frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{7}}{(\sqrt{10}-\sqrt{7})(\sqrt{10}+\sqrt{7})}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{7}}{3}$ ，$\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$

$\frac{1}{c}=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

$\because \sqrt{10}>\sqrt{6}>\sqrt{5}$ 且 $\sqrt{7}>\sqrt{3}>\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{10}+\sqrt{7}>\sqrt{6}+\sqrt{3}>\sqrt{5}+\sqrt{2}$

$\therefore \frac{\sqrt{10}+\sqrt{7}}{3}>\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}>\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3} \rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$ ($a>0$ ，$b>0$ ，$c>0$)，∴a<b<c，選 A。

8. x 是實數，則 $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-2017}$ 的最大值為何?
   (A)2017 (B) $\sqrt{2017}$ (C)2016 (D) $\sqrt{2016}$

<解析>

$f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-2017}=\frac{2017}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2017}}$

當分母越小，則 $f(x)$ 越大

$\therefore x=2017$ 時，有最大值 $\frac{2017}{\sqrt{2017}}=\sqrt{2017}$ ，選 B。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 籃球 3 人鬥牛賽，共有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬 9 人參加，組成 3 隊且甲、乙兩人不在同一隊的組隊方式有_______種。

<解析>

將 9 人分為甲、乙及另一隊

$C^7_2\times C^5_2\times C^3_3=21\times10\times1=210$ 種

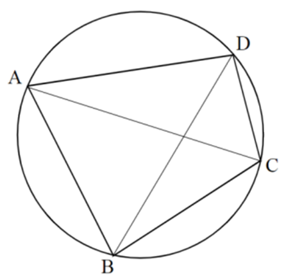
最後 3 人同一隊

剩 5 人選 2 人與乙同隊

7 人選 2 人與甲同隊

2. 如右圖所示，ABCD 為圓內接四邊形，若 $\angle DBC=30^\circ$ ，$\angle ABD=45^\circ$ ，$\overline{CD}=6$ ，則 $\overline{AD}=$ _______。

<解析>



設此圓的半徑為 R

分別在△ABD 及△BCD，考慮正弦定理

$\frac{\overline{AD}}{\sin\angle ABD}=2R=\frac{\overline{CD}}{\sin\angle DBC} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}=\frac{6}{\sin 30^\circ}$

$\Rightarrow \overline{AD}=\frac{6}{\sin 30^\circ}\times\sin 45^\circ=6\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

3.　計算 $(\log 20)^3-(\log 2)^3-\log 20\cdot\log 8=$______ 。

<解析>

利用 $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

所求= $(\log 20)^3-(\log 2)^3-3\log 20\cdot\log 2(\log 20-\log 2)=(\log 20-\log 2)^3=1$

4.　已知 $(x^3+2x+5)f(x)$ 除以 $x+3$ 的餘式為 56，則 $(x^2+x+4)f(x)$ 除以 $x+3$ 的餘式為_____ 。

<解析>

$x=-3$ 代入 $(x^3+2x+5)f(x)$

得 $(-27-6+5)\cdot f(-3)=56$

$\therefore f(-3)=-2$

則 $x=-3$ 代入 $(x^2+x+4)f(x)$

得所求為 $(9-3+4)\cdot f(-3)=10\cdot(-2)=-20$

5.　$\forall x\in\mathrm{R}$ ，$\dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$ 恆成立，則 $\alpha<k<\beta$ ，試求 $\alpha^2+\beta^2=$_____ 。

<解析>

$\because 4x^2+6x+3$ 恆正 $\rightarrow 2x^2+2kx+k<4x^2+6x+3$

$\therefore 2x^2+(6-2k)x+(3-k)>0$ 恆成立

且 2>0 開口向上

$\Delta=(6-2k)^2-8(3-k)<0 \rightarrow 1<k<3$

則 $\alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=10$

6.　設數列 $<a_n>$ 之遞迴定義式如下:

$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+n^2+1 \end{cases}$ ，n 為任意自然數，則一般項 $a_n=$___________ 。

<解析>

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=a_1+1^2+1 \\ a_3=a_2+2^2+1 \\ a_4=a_3+3^2+1 \\ \ldots\ldots \\ a_n=a_{n-1}+(n-1)^2+1 \end{cases}$$

$\therefore a_n=[1^2+2^2+3^2+\ldots.+(n-1)^2]+n$

$\rightarrow a_n=\dfrac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}+n=\dfrac{n(2n^2-3n+7)}{6}$

7.　二次函數的圖形通過(1, 3)、(-2, -9)、(3, 1)，求此二次函數的最大值是______ 。

<解析>

令 $f(x)=ax^2+bx+c$ 代入(1, 3)、(-2, -9)、(3, 1)

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ 4a-2b+c=-9 \\ 9a+3b+c=1 \end{cases}$$

$\rightarrow 3a-3b=-12$，$-a+b=4$

$\rightarrow 5a+5b=10$，$a+b=2$

$\therefore 2a=-2$，$a=-1$，$b=3$，$c=3-3+1=1$

$\therefore f(x)=-x^2+3x+1$，最大值$=\dfrac{b^2-4ac}{4}=\dfrac{9-4(-1)(1)}{-4}=\dfrac{13}{4}$。

8. 若$5^{2x}=\sqrt{2}+1$，則$\dfrac{5^{3x}+5^{-3x}}{5^x+5^{-x}}=$__________。

<解析>

原式$=\dfrac{(5^x+5^{-x})\cdot(5^{2x}-5^x\cdot 5^{-x}+5^{-2x})}{5^x+5^{-x}}=5^{2x}-1+\dfrac{1}{5^{2x}}$

$=\sqrt{2}+1-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1-1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}-1$

三、計算題(10 分/10 分，共 20 分) ※未寫計算過程不予計分

1. 平面上過點 P(-1, -1)且與圓 C: $x^2+y^2-2x=0$相切的直線方程式為何?

<解析>

$\because$圓 C: $x^2+y^2-2x=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$

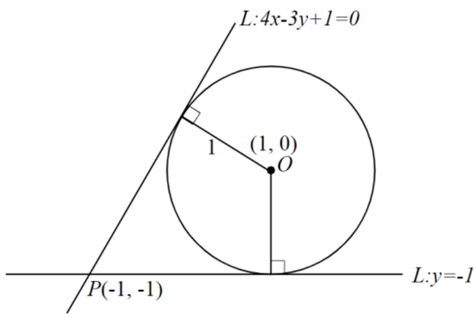
表示圓 C 的圓心 O(1, 0)，半徑 r=1

假設過 P 點(-1, -1)的切線為 L: $y+1=m(x+1)$

$\rightarrow$L: $mx-y+(m-1)=0$，$\because d(O,L)=r=1$

$\therefore \dfrac{|m-0+m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$，$\dfrac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$，$(2m-1)^2=m^2+1$

$\Rightarrow 4m^2-4m+1=m^2+1$，$m(3m-4)=0$，$m=\dfrac{4}{3}$或$m=0$



①當$m=\dfrac{4}{3}$時，得切線 L: $4x-3y+1=0$

②當$m=0$時，得切線 L: $y=-1$

答:切線方程式為$4x-3y+1=0$或$y=-1$

2. Letters a and b are different positive whole numbers, if we insert a sequence of positive numbers x_1、x_2、x_3、x_4、……、x_n and let a、x_1、x_2、x_3、x_4、……、x_n、b become a geometric sequence. Prove that $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\ldots\cdot x_n}<\dfrac{a+b}{2}$.

<翻譯> a、b為相異正整數，插入正整數x_1、x_2、x_3、x_4、……、x_n，使a、x_1、x_2、x_3、x_4、……、x_n、b成等比數列。求證: $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\ldots\cdot x_n}<\dfrac{a+b}{2}$

<解析>

①a 、$b>0$ ，$a\neq b$ ➔ $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

②a 、x_1 、x_2 、x_3 、x_4 、…… 、x_{n-1} 、x_n 、b 成等比

∴ $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\ldots\cdot x_{n-1}\cdot x_n=(ab)(ab)(ab)\ldots.(ab)=(ab)^{\frac{n}{2}}$

③$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot x_n}=\sqrt[n]{(ab)^{\frac{n}{2}}}=[(ab)^{\frac{n}{2}}]^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$ ，此題得證。