2021 第十七屆IMC國際數學競賽複賽(台灣)
2021 Seventeenth International Mathematics Contest (Taiwan)

高中一年級試卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：＿＿＿＿＿＿＿ 准考證號碼：＿＿＿＿＿＿＿ 試卷總分：＿＿＿＿＿＿＿

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！ ◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不計算成績！								
選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	**C**	**B**	**A**	**D**	**B**	**A**	**A**	**B**
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	$x\le\frac{1}{3}$ 或 $x\ge 3$	**16**	$x+y=4$	**-20**	**10**	$\frac{n(2n^2-3n+7)}{6}$	$\frac{13}{4}$	$2\sqrt{2}-1$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 設$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$的整數部分為 a，純小數的部分為 b，則$a+\dfrac{b^2}{1-b}$之值為何?

   (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}=3+(\sqrt{3}-1)$

$\therefore a=3$ ， $b=\sqrt{3}-1$

$\therefore a+\dfrac{b^2}{1-b}=3+\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{1-(\sqrt{3}-1)}=3+\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=3+2=5$ ，選 C。

2. 方程式$-x=2^x-2$有多少個實數解? (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

<解析>

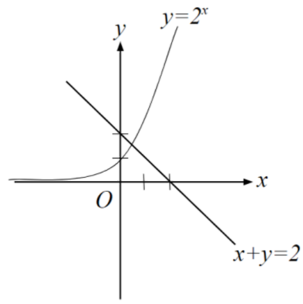
原式: $2-x=2^x$

令 $y=2^x$ 和 $y=2-x$

當 $y=2^x$ ，畫出過(1, 2)和(0, 1)之曲線

當 $y=2-x$ ，畫出過(2, 0)和(0, 2)之直線

兩圖形交於一點➔有一個實數解，選 B。



3. 設$2\le x\le 5$ ，求$y=2x^2-12x+15$的最大值m與最小值n ，則$m\cdot n$=?

   (A)-15 (B)-12 (C)-9 (D)-6

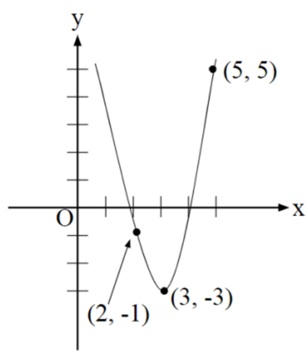
<解析>

$y=2x^2-12x+15=2(x-3)^2+15-18=2(x-3)^2-3$

①當 x=5 時，y 有最大值 5

②當 x=3 時，y 有最小值-3

$\therefore m\cdot n=5\cdot(-3)=-15$ ，選 A。



4. 已知$f(x)=4x^4-8x^3-15x^2+13x+49$，則$f(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})$=?

(A)20 (B)30 (C)40 (D)50

<解析>

令$x=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ ➔ $2x-3=2\sqrt{2}$ ， $(2x-3)^2=8$ ， $4x^2-12x+1=0$

利用除法$f(x)=(4x^2-12x+1)(x^2+x-1)+50$

$\therefore f(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})=0+50=50$ ，選 D。

5. We know that $[x]$ represents the maximum value of whole number that is not exceed x. If x_0 is the real root of equation $[x]^x=50$, then what is the value of x_0?

<翻譯>已知$[x]$表示不超過x的最大整數，若x_0是方程式$[x]^x=50$的實數根，則

(A) $2<x_0<3$ (B) $3<x_0<4$ (C) $4<x_0<5$ (D) $5<x_0<6$

<解析>

令$f(x)=[x]^x$

$[x]=0$時， $0<x<1 \rightarrow f(x)=0$

$[x]=1$時， $1\le x<2 \rightarrow f(x)=1$

$[x]=2$時， $2\le x<3 \rightarrow f(x)=2^x \rightarrow 2^2\le f(x)<2^3$ ， $4\le f(x)<8$

$[x]=3$時， $3\le x<4 \rightarrow f(x)=3^x \rightarrow 3^3\le f(x)<3^4$ ， $27\le f(x)<81$

選 B。

6. 設$x+y=\sqrt{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$ ， $x-y=\sqrt{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$ ，求x^2+y^2=?

(A) $3\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{6}$ (D) $3\sqrt{6}$

<解析>

$$xy=[(x+y)^2-(x-y)^2]\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}[(\sqrt{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}})^2-(\sqrt{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}})^2]$$

$$=\frac{1}{4}[(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})-(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})]=\sqrt{2}$$

$$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}})^2-2\times\sqrt{2}=3\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3\sqrt{3}$$

選 A。

7. 比較$a=\sqrt{10}-\sqrt{7}$ ， $b=\sqrt{6}-\sqrt{3}$ ， $c=\sqrt{5}-\sqrt{2}$的大小為何?

(A) $a<b<c$ (B) $b<c<a$ (C) $a<c<b$ (D) $c<b<a$

<解析>

$$\because \frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{7}}{(\sqrt{10}-\sqrt{7})(\sqrt{10}+\sqrt{7})}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{7}}{3} ，\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$$

$\because \sqrt{10}>\sqrt{6}>\sqrt{5}$ 且 $\sqrt{7}>\sqrt{3}>\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{10}+\sqrt{7}>\sqrt{6}+\sqrt{3}>\sqrt{5}+\sqrt{2}$

$\therefore \frac{\sqrt{10}+\sqrt{7}}{3} > \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3} > \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3} \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$ ($a>0$，$b>0$，$c>0$)，∴$a<b<c$，選 A。

8. x是實數，則$f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-2017}$的最大值為何?
(A)2017 (B)$\sqrt{2017}$ (C)2016 (D)$\sqrt{2016}$

<解析>

$f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-2017}=\frac{2017}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2017}}$

當分母越小，則$f(x)$越大

∴$x=2017$時，有最大值$\frac{2017}{\sqrt{2017}}=\sqrt{2017}$，選 B。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 解不等式$\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\le 2$，得$x$的範圍為________。

<解析>

分母不為 0→ $x\ne 1$

∵不等式兩邊皆非負

$\therefore (\frac{x+1}{x-1})^2 \le 4 \rightarrow (x+1)^2 \le 4(x-1)^2$，$3x^2-10x+3\ge 0$

$\therefore (3x-1)(x-3)\ge 0$，$x\le\frac{1}{3}$或$x\ge 3$。

2. 若$x=1000^{3\sqrt{3}}$，則x為______位數。(其中$\sqrt{3}=1.732$)

<解析>

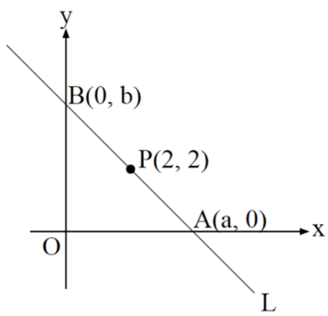
$\log x=\log 1000^{3\sqrt{3}}=3\sqrt{3}\log 1000=3\sqrt{3}\cdot 3=9\sqrt{3}=15.588$

∴x為 16 位數

3. If the area that enclosed by the straight line L which pass through point (2,2), x-axis, and y-axis in first quadrant is 8. Find the linear equation of straight line L is______.

<翻譯>設直線 L 經過(2, 2)且與兩軸在第一象限所圍成的三角形面積為 8，則 L 方程式為______。

<解析>



設直線 L: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，$a>0$，$b>0$且過 P(2, 2)，如圖所示

得$\frac{2}{a}+\frac{2}{b}=1 \rightarrow b+a=\frac{1}{2}ab$，又△OAB 面積=$\frac{1}{2}|ab|=\frac{1}{2}ab=8$

$\therefore b+a=8$，$b=8-a$

$\frac{1}{2}a(8-a)=8$，$a^2-8a+16=0$，$(a-4)^2=0$，$a=4$，$b=4$

∴L 的直線方程式$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1 \rightarrow x+y=4$

4. 已知$(x^3+2x+5)f(x)$除以$x+3$的餘式為 56，則$(x^2+x+4)f(x)$除以$x+3$的餘式為______。

<解析>

$x=-3$代入$(x^3+2x+5)f(x)$

得$(-27-6+5)\cdot f(-3)=56$

$\therefore f(-3)=-2$

得$x=-3$代入$(x^2+x+4)f(x)$

得所求為$(9-3+4)\cdot f(-3)=10\cdot(-2)=-20$

5. $\forall x\in \mathrm{R}$，$\dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$恆成立，則$\alpha<k<\beta$，試求$\alpha^2+\beta^2=$______。

<解析>

$\because 4x^2+6x+3$恆正$\rightarrow 2x^2+2kx+k<4x^2+6x+3$

$\therefore 2x^2+(6-2k)x+(3-k)>0$恆成立

且 2>0 開口向上

$\Delta=(6-2k)^2-8(3-k)<0 \Rightarrow 1<k<3$

則$\alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=10$

6. 設數列$\langle a_n \rangle$之遞迴定義式如下:

$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+n^2+1 \end{cases}$，$n$為任意自然數，則一般項$a_n=$____________。

<解析>

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=a_1+1^2+1 \\ a_3=a_2+2^2+1 \\ a_4=a_3+3^2+1 \\ \ldots\ldots \\ a_n=a_{n-1}+(n-1)^2+1 \end{cases}$$

$\therefore a_n=[1^2+2^2+3^2+\ldots.+(n-1)^2]+n$

$\rightarrow a_n=\dfrac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}+n=\dfrac{n(2n^2-3n+7)}{6}$

7. 二次函數的圖形通過(1, 3)、(-2, -9)、(3, 1)，求此二次函數的最大值_______。

<解析>

令$y=ax^2+bx+c$代入(1, 3)、(-2, -9)、(3, 1)

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ 4a-2b+c=-9 \\ 9a+3b+c=1 \end{cases}$$

$\rightarrow 3a-3b=-12$，$-a+b=4$

$\rightarrow 5a+5b=10$，$a+b=2$

$\therefore 2a=-2$，$a=-1$，$b=3$，$c=3-3+1=1$

$\therefore y=-x^2+3x+1$

8. 若$5^{2x}=\sqrt{2}+1$，則$\dfrac{5^{3x}+5^{-3x}}{5^{x}+5^{-x}}=$ ________ 。

<解析>

原式=$\dfrac{(5^x+5^{-x})\cdot(5^{2x}-5^x\cdot5^{-x}+5^{-2x})}{5^x+5^{-x}}=5^{2x}-1+\dfrac{1}{5^{2x}}$

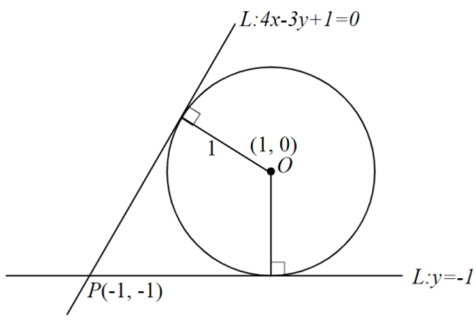
$=\sqrt{2}+1-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1-1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}-1$

三、計算題(10 分/10 分，共 20 分) ※未寫計算過程不予計分

1. What is the linear equation that cut with circle C $x^2+y^2-2x=0$ and pass through point P (-1,-1)?

<翻譯>平面上過點 P(-1, -1)且與圓 C: $x^2+y^2-2x=0$ 相切的直線方程式為何?

<解析>



∵圓 C: $x^2+y^2-2x=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$

表示圓 C 的圓心 O(1, 0)，半徑 r=1

假設過 P 點(-1, -1)的切線為 L: $y+1=m(x+1)$

→L: $mx-y+(m-1)=0$ ，∵ $d(O,L)=r=1$

∴ $\dfrac{|m-0+m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$ ，$\dfrac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$ ，$(2m-1)^2=m^2+1$

$\Rightarrow 4m^2-4m+1=m^2+1$ ，$m(3m-4)=0$ ，$m=\dfrac{4}{3}$ 或 $m=0$

①當 $m=\dfrac{4}{3}$ 時，得切線 L: $4x-3y+1=0$

②當 $m=0$ 時，得切線 L: $y=-1$

答:切線方程式為 $4x-3y+1=0$ 或 $y=-1$

2. a、b 為相異正整數，插入正整數 x_1、x_2、x_3、x_4、……、x_n，使 a、x_1、x_2、x_3、x_4、……、x_n、b 成等比數列。求證: $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\ldots\cdot x_n}<\dfrac{a+b}{2}$

<解析>

① a、$b>0$ ，$a\neq b \Rightarrow \dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

② a、x_1、x_2、x_3、x_4、……、x_{n-1}、x_n、b 成等比

∴ $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\ldots\cdot x_{n-1}\cdot x_n=(ab)(ab)(ab)\ldots.(ab)=(ab)^{\frac{n}{2}}$

③ $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\ldots\cdot x_n}=\sqrt[n]{(ab)^{\frac{n}{2}}}=[(ab)^{\frac{n}{2}}]^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$ ，此題得證。