Examinee 學生資料

Country/國家: ____ City/市(省): ____ School/學校: ____

Name/姓名: ____ Sex/性別: ____ Instructor/指導老師: ____

2019 第十五屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)

Fifteenth IMC International Mathematics Contest (Singapore)2019

國中二年級(決賽)試卷

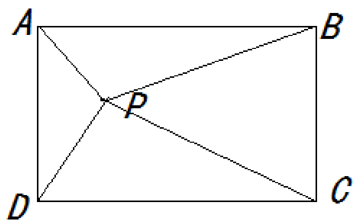
考試時間:90 分鐘　　卷面總分:100 分　　得分:____________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	B	D	D	B	A	C
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	n^2+n-1	$-\frac{1}{2}$或-1	$y=\frac{48+25\sqrt{3}}{39}(x-2)-3$	$b\le -\frac{1}{8}$	$\frac{60}{13}$	$x<5$	$\frac{16\sqrt{17}}{85}$	$\frac{10\sqrt{2}}{7}$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 已知點P是矩形ABCD內的任一點，連接PA、PB、PC、PD，得到△PAB、△PBC、△PCD、△PDA，則下列命題一定成立的是______。



①$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}$
②$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAD}$
③若$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}$，則$S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PBC}$
④若$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}$，則$S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PCD}$

(A) ①　(B) ②　(C) ①③　(D) ②④

<解析>

$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PBC}$

選D。

2. 已知$\frac{xy+xz}{x+y+z}=2$，$\frac{yz+xy}{x+y+z}=3$，$\frac{xz+yz}{x+y+z}=4$，則$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=$______。

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

<解析>

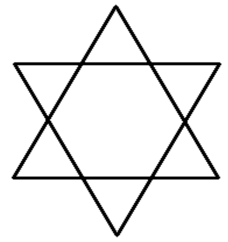
$\frac{xy+xz}{x+y+z}=2\rightarrow\frac{x(y+z)}{x+y+z}=\frac{2}{1}$，$\frac{y+z}{x+y+z}=\frac{2}{x}$……①

$\frac{yz+xy}{x+y+z}=3\rightarrow\frac{y(z+x)}{x+y+z}=\frac{3}{1}$，$\frac{z+x}{x+y+z}=\frac{3}{y}$……②

$\frac{xz+yz}{x+y+z}=4\rightarrow\frac{z(x+y)}{x+y+z}=\frac{4}{1}$，$\frac{x+y}{x+y+z}=\frac{4}{z}$……③

∴①+②+③$\rightarrow\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2$，選B。

3. 已知一個六角徽章是由兩個邊長為1的正三角形組合而成，其中6個交點是各邊的三等分點，這個六角徽章的面積為______。



(A)$\frac{\sqrt{3}}{4}$　(B)$\frac{\sqrt{3}}{3}$　(C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D)$\frac{\sqrt{3}}{4}$

<解析>

正六邊形有6個正三角形，加上外面6個正三角形，共12個正三角形

小正三角形的邊長$=\frac{1}{3}$

則12個正三角形面積$=12\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{1}{3})^2=\frac{\sqrt{3}}{3}$

選B。

4. 一個不透明的布袋裝有4個大小、質地均相同的乒乓球，每個球上面分別標有1、2、3、4。麗麗先從布袋中隨機抽取一個乒乓球(不放回去)，再從剩下的3個球隨機抽取第二個乒乓球，則兩次取得乒乓球的數字之積是奇數的概率為______。(A)$\frac{1}{16}$　(B)$\frac{1}{12}$　(C)$\frac{1}{8}$　(D)$\frac{1}{6}$

<解析>

第一次是奇數且第二次也是奇數

$\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

選D。

5. A地到B地距離999公里，若沿路每隔1公里豎一個里程碑，上面標出該處到起點和終點的距離，如(9, 990)，則像這樣只使用兩個數字來標記公里數的里程碑(不計起點和終點)有______個。(A)9 (B)11 (C)32 (D)38

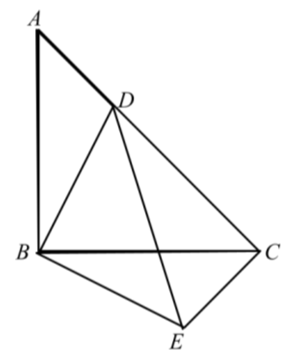
<解析>

9=0+9=1+8=2+7=3+6=4+5

若兩個數字記為a, b，則可構成aaa、aab、aba、baa(ab可互換，共8種情況)，共5×8-2=38

選D。

6. In isosceles right-angled (等腰直角三角形) △ABC as shown, ∠ABC=90°, point D lies on AC, after rotating (旋轉) △ABD around vertex (頂點) B in clockwise direction (順時針) by 90° forms △CBE. If AB=4, AD:DC=1:3, then what is the length (長度) of DE? (A) $3\sqrt{2}$ (B)$2\sqrt{5}$ (C)$\frac{5\sqrt{5}}{2}$ (D)$4\sqrt{2}$



<解析>

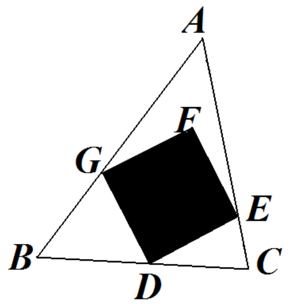
$\overline{AC}=4\sqrt{2}$，$\overline{AD}=4\sqrt{2}\times\frac{1}{4}=\sqrt{2}$，$\overline{CD}=4\sqrt{2}\times\frac{3}{4}=3\sqrt{2}$

$\angle DCB+\angle BCE=90°$

△DCE，$\overline{DE}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{5}$

選B。

7. Square DEFG is located inside (內部) △ABC as shown on the right, such that G, D, and E lie on the side of AB, BC, and CA, respectively, and F is an interior (內部的) point. D is the midpoint (中點) of BC, AG=7, BG=6, AE=8, CE=3. What is the area (面積), in square units, of the plain portion (空白部分) in the diagram (圖中)?



(A) $6\sqrt{30}$ (B) $\frac{37\sqrt{3}}{2}$ (C)33 (D)37

<解析>

將△DEC 繞 D 順時針旋轉 180°至△DHB，連接 GH，則△GDH 為等腰直角三角形，AC//BH，△EGH 的面積即為正方形 DEFG 的面積.則由餘弦定理得$7^2+8^2-2\times7\times8\cos A=3^2+6^2+2\times3\times6\cos A$，解得$\cos A=\frac{17}{37}, \sin A=\frac{6\sqrt{30}}{37}$, 所以所求面積即為$S_{\triangle AGE}+S_{\triangle BGH}=\frac{1}{2}(7\times8+3\times6)\sin A=6\sqrt{30}$.

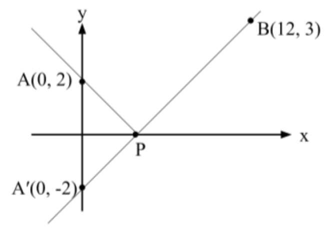
8. 代數式$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(12-x)^2+9}$的最小值為______。

(A)$2+3\sqrt{17}$ (B) $3+2\sqrt{17}$ (C)13 (D) $2\sqrt{10}+3\sqrt{5}$

<解析>

$\sqrt{(x-0)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x-12)^2+(0-3)^2}$，

即A(0, 2)，B(12, 3)，P(x, 0)在x軸上，求$\overline{PA}+\overline{PB}$最小值



$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA'}+\overline{PB}=\overline{A'B}=\sqrt{(12-0)^2+[3-(-2)]^2}=13$，選C。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 化簡$\sqrt{(n+2)(n+1)n(n-1)+1}$=______。

<解析>

$\sqrt{(n+2)(n+1)n(n-1)+1}=\sqrt{(n^2+n)(n^2+n-2)+1}$

$=\sqrt{(n^2+n)^2-2(n^2+n)+1}=n^2+n-1$

2. 方程 $\frac{2x+5}{3}+\frac{3}{2x+5}=\frac{1-x}{2}+\frac{2}{1-x}$的解為______。

<解析>

令$a=\frac{2x+5}{3}$，$b=\frac{1-x}{2}$，$a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}$，$a-b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$，ab=1

$\frac{2x+5}{3}\times\frac{1-x}{2}=1$，2x-5x+5-2x²=6，$2x^2+3x+1=0$

$(2x+1)(x+1)=0$，$x=-\frac{1}{2}$或-1

3. 已知A(-1, 1)、B(2, -3)，直線AB繞點B順時針旋轉60°得到的直線方程式為______。

<解析>

①$(x-2)^2+(y+3)^2=(x+1)^2+(y-1)^2=25$

$x^2-4x+4+y^2+6y+9=x^2+2x+1+y^2-2y+1$

6x-8y=11

②$(x-2)^2+(y+3)^2=25$…..(1)

6x-8y=11，$x=\frac{11+8y}{6}$…..(2)，將(2)代入(1)

$(\frac{11+8y}{6}-2)^2+(y+3)^2=25$，4y2+8y-23=0，$y=\frac{-8\pm\sqrt{64+368}}{8}=\frac{-2\pm3\sqrt{3}}{2}$ (y取正)

$x=\frac{11+8\times\frac{-2+3\sqrt{3}}{2}}{6}=\frac{11-8+12\sqrt{3}}{6}=\frac{3+12\sqrt{3}}{6}=\frac{1+4\sqrt{3}}{2}$

$m=\frac{\frac{-2+3\sqrt{3}}{2}+3}{\frac{1+4\sqrt{3}}{2}-2}=\frac{-2+3\sqrt{3}+6}{1+4\sqrt{3}-4}=\frac{3\sqrt{3}+4}{4\sqrt{3}-3}=\frac{(3\sqrt{3}+4)(4\sqrt{3}+3)}{48-9}=\frac{36+9\sqrt{3}+16\sqrt{3}+12}{39}=\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$

即方程式: $y=\frac{48+25\sqrt{3}}{39}(x-2)-3$

4. 已知關於x的方程$x^2-2ax-a+2b=0$，其中a、b為實數，若對於任何實數a，此方程式都有實數根，則b的取值範圍是______。

<解析>

$\triangle=4a^2+4a-8b\geq0$，對於任意$a$恆成立

$8b\leq(4a^2+4a)$

$4a^2+4a=4(a^2+a)=4(a+\frac{1}{2})^2-1$

$8b\leq-1$，$b\leq-\frac{1}{8}$

5. 若△ABC的三邊a、b、c滿足條件:$a^2+b^2+c^2+338=10a+24b+26c$，則這個三角形最長邊上的高為______。

<解析>

$a^2+b^2+c^2+338=10a+24b+26c$

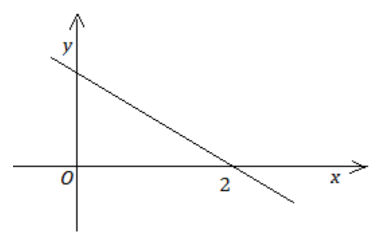
$a^2-10a+25+b^2-24b+144+c^2-13c+169=0$

$(a-5)^2+(b-12)^2+(c-13)^2=0$

$a=5$，$b=12$，$c=13$

△ABC為直角三角形，斜邊上的高: 5×12=13×H，$H=\frac{60}{13}$

6. 若函數y=kx+b的圖像如圖所示，則關於x的不等式$k(x-3)+b>0$的解為______。



<解析>

①(2, 0)代入y=ax+b

➔0=2k+b，b=-2k

②x=0代入y=kx+b➔y=b

∴與y軸的交點(0, b)，b>0

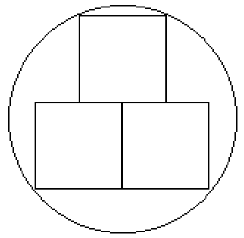
③由①②得k<0

④b=-2k代入k(x-3)+b>0

Kx-3k-2k>0，kx>5k

➔x<5

7. 如圖，在一個半徑為1的圓內放入三個等大的正方形，則這些正方形邊長為______。



<解析>

設正方形的邊長為a，圓心到底邊的距離為b

$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ (\frac{a}{2})^2+(2a-b)^2=1 \end{cases}$，得解$b=\frac{13}{16}a$

$a^2+(\frac{13}{16}a)^2=1$，$\frac{425}{256}a^2=1$，$a^2=\frac{256}{425}$，$a=\frac{16}{5\sqrt{17}}=\frac{16\sqrt{17}}{85}$

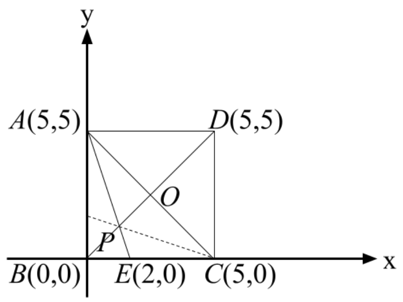
8. 正方形ABCD的邊長為5，E為邊BC上一點，使得BE=2，P是對角線BD上的一點，使得PE+PC的值最小，則PB=______。

<解析>

BD為對稱軸➔C的對稱點是A

連AE交BD於P➔PA=PC

PE+PC=PE+PA=AE最小



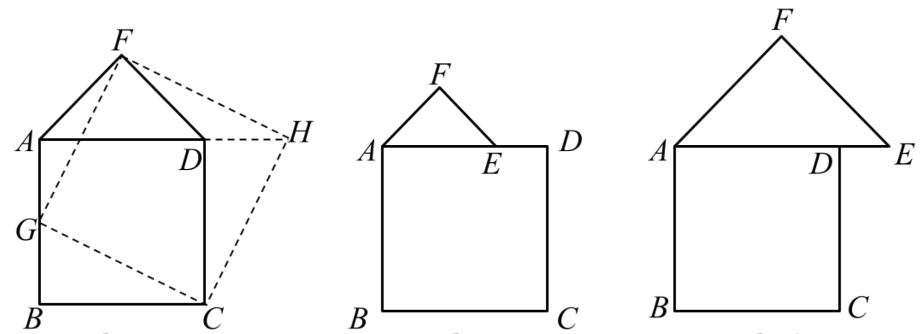
$\begin{cases} \overleftrightarrow{BD}: y=x \\ \overleftrightarrow{AE}: \frac{y-0}{x-2}=\frac{5-0}{0-2}, \frac{y}{x-2}=\frac{-5}{2}, 2y=-5x+10, 5x+2y=10 \end{cases}$

交點P$(\frac{10}{7}, \frac{10}{7})$

$\overline{PB}=\sqrt{(\frac{10}{7})^2+(\frac{10}{7})^2}=\frac{10\sqrt{2}}{7}$。

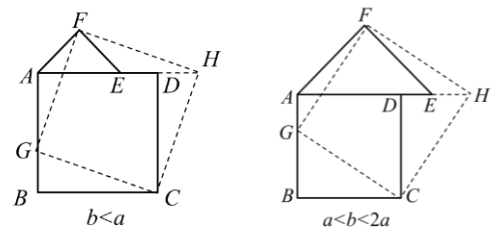
三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 正方形 ABCD 的邊長為 a，等腰直角三角形 FAE 的斜邊 AE=b (b<2a)，且邊 AD 和 AE 在同一直線上，小明發現: 當 b=a 時，如圖①，在 BA 上選取中點 G，連結 FG 和 CG，裁掉△FAG 和△CHD 的位置構成正方形 FGCH。
類似小明的剪拚方法，在 BA 上選取點 G，連結 FG 和 CG，裁掉△FAG 和△CHD 的位置構成正方形 FGCH。請你在圖②和圖③上分別畫出剪拚成一個新正方形的示意圖。要使圖中所剪拚的新圖形是正方形，須滿足$\frac{\overline{BG}}{\overline{AE}}$=______。



$b=a$ 圖①　$b<a$ 圖②　$a<b<2a$ 圖③

<解析>



圖②　圖③

取$\overline{AE}=2\overline{BG}$，$\frac{\overline{BG}}{\overline{AE}}=\frac{1}{2}$

2. 已知函數$y=\frac{x+1}{x^2+3}$，記函數的最大值為 a，最小值為 b，求 $a+b$ 的值。

<解析>

$y=\frac{x+1}{x^2+3}$➔ $yx^2+3y=x+1$

$yx^2-x+3y+1=0$

若 y≠0，判別式$(-1)^2-4y(3y-1)\geq 0$，得解為$-\frac{1}{6}\leq y\leq\frac{1}{2}$

故 $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{6}$，則 $a+b=\frac{1}{3}$