Examinee 學生資料

Country/國家:______ City/市(省):______ School/學校:______

Name/姓名:______ Sex/性別:______ Instructor/指導老師:______

2020 第十六屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)

Sixteenth IMC International Mathematics Contest (Singapore)2020

國中二年級(決賽)試卷

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分　得分:________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	A	C	D	D	A
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	16	$-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$	1	12	$x<-2$ $-2<x<-1$ $1<x<3$	$\frac{24}{5}$	①③⑤	12

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 已知$x^2+x=1$，$x^4+2x^3-2x^2-3x+2020=$(　　)。
(A)2018 (B)2019 (C)2021 (D)2022

<解析>

$x^4+2x^3-2x^2-3x+2020=(x^2+x-1)\times(x^2+x-2)+2018$

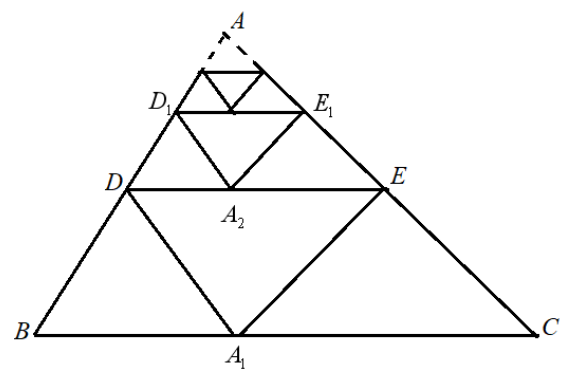
且x2+x+1=0，其值=2018，選A。

2. 已知實數a、b、c滿足a+b+c=0，abc=3，那麼$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$的值(　　)。
(A)是正數 (B)是零 (C)是負數 (D)可正可負

<解析>

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2abc}<0$，選C。

3. 將△ABC沿著中線DE折疊，使點A落在BC邊上的A_1處，稱為第一次操作，摺痕DE到BC的距離記為h_1；還原紙片後，再將△ADE沿著中線D_1E_1折疊，使點A落在DE邊上A_2處，稱為第二次操作，摺痕D_1E_1到BC的距離記為h_2；按上述方法操作下去，經過第2020次操作後得到的折痕$D_{2019}E_{2019}$到BC的距離記為h_{2020}，若$h_1=1$，則$h_{2020}=$(　　)。(A)$\frac{1}{2^{2020}}$ (B)$\frac{1}{2^{2019}}$ (C)$1-\frac{1}{2^{2020}}$ (D)$2-\frac{1}{2^{2019}}$



<解析>

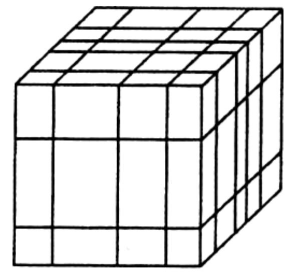
∵D、E是中點

∴點A_1到A_2，記為$h_1=1$，則點A到$A1$，$h=2$

點A到折痕$D_{2019}E_{2019}$的距離是h_1的$\left(\frac{1}{2}\right)^{2019}$，則$h_{2020}=2-\frac{1}{2^{2019}}$

選D。

4. A wooden (木塊) cube (正方體), with edge length (邊長) 1 meter, is dissected into (被切成) 3、4 and 5 portions (部分) respectively (分別地) for its length (長), width (寬) and height (高), resulting into 60 small cuboids, as shown in the figure. What is the sum of the surface areas (表面積) of all 60 cuboids? (A)24 (B)12 (C)18 (D)6



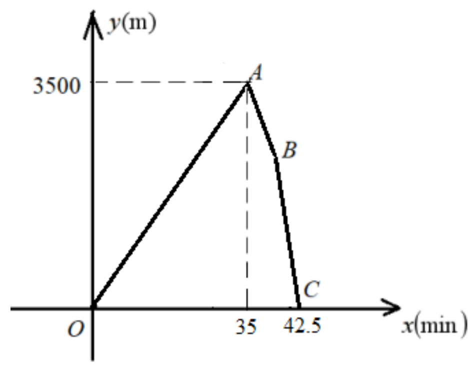
<解析>

切成3片，多出4個面，切成4條，多出6個面，切成5塊，多出8個面

表面積增為6+4+6+8=24個正方形的面

則表面積=1×1×24=24，選A。

5. 小亮從家出發騎電動車去學校參加運動會，他剛出發，妹妹小紅發現他沒有帶水杯立即騎自行車追趕，他們二人以各自的速度均速前進，小亮到達學校5分鐘後，也發現自己沒帶水杯，隨即以另一個速度快速折返回家，直到與小紅相遇。已知小紅的速度為300m/min，小紅與小亮之間的距離y(m)與小紅騎自行車時間x(min)之間的函數圖形如圖所示，現有以下4個結論:
①小亮從家到學校的速度為400m/min；
②家到學校的距離是3500m；
③圖中B的坐標(40, 2000)；
④小亮從學校往家裡趕的速度為500m/min
以上4個結論中正確的有(　　)。 (A)1 (B)2 (C)3 (D)4



<解析>

3500÷35=100，300+100=400 m/min，家到學校的距離=400×35=14000m

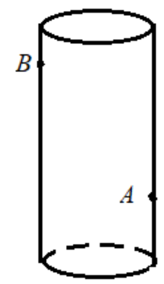
B點表示，小亮在學校5分鐘，小紅還在來學校的路程=3500-5×300=2000

B(40, 2000)

42.5-40=2.5，2000÷2.5=800，800-300=500m/min

正確的有①③④，有3個，選C。

6. The height (高) of a transparent cylindrical glass (透明圓柱玻璃杯) (excluding its thickness (厚度不計)) is 15 cm, and the radius (半徑) of the circular base (底面) is 3 cm. There is a drop of (一滴) honey juice at the inner wall (內壁) of the glass 5 cm from the bottom (底部). At this time, a small worm (小蟲) is just at the B of the outer wall of the glass 2 cm away from the mouth of the glass, what is the shortest distance (最短距離) that the worm needs to crawl (爬行) to get to the drop of honey juice? (A)$12+3\pi$ (B)$8+3\pi$ (C)$\sqrt{64+9\pi^2}$ (D) $\sqrt{144+9\pi^2}$



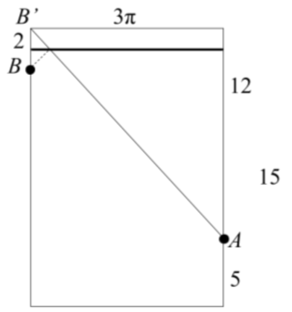
<解析>

取B的對稱點B´，H=15-5+2=12

圓柱體展開圖後，上底的長=3π

則AB´=$\sqrt{12^2+(3\pi)^2}=\sqrt{144+9\pi^2}$

選D。



7. 實數m=2020^3-2020，則下列各數不能整除m的是(　　)。

(A)2021 (B)2020 (C)2019 (D)2018

<解析>

m=$2020\times(2020^2-1)=2020\times2019\times2021$，選D。

8. 已知a、b、c是實數，則$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$=(　　)。

(A)0 (B)1 (C)3 (D)a+b+c

<解析>

原式=$\frac{a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=0$

選A。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 已知 $(x-2)^2+\sqrt[4]{y-4}=0$，則y^x為________。

<解析>

取x=2，y=4

則$4^2=16$

2. 若不等式$x^2-ax-b<0$的解$2<x<3$，則不等式$bx^2-ax-1>0$的解是________。

<解析>

$(x-2)(x-3)<0$，$x^2-5x+6<0$，a=5，b=-6

$-6x^2-5x-1>0$，$6x^2+5x+1<0$

$(3x+1)(2x+1)<0$，$-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$

3. $2020^{2019}+2019^{2020}$的末位數字是________。

<解析>

2020^{2019}的末位數字是0，$2019^{2020}=(2019^2)^{1010}$末位數字是1

則和的末位數字=0+1=1。

4. 如果$\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{2^5+2^5}\times\frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{3^5+3^5+3^5}=2^n$，則n=________。

<解析>

$\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{2^5+2^5}=\frac{4\times4^5}{2\times2^5}=\frac{2^{12}}{2^6}=2^6$，$\frac{6\times6^5}{3\times3^5}=\frac{2^6\times3^6}{3^6}=2^6$

原式=$2^6\times2^6=2^{12}$，n=12

5. 不等式$\frac{1}{x+1}(x-1)(x+2)^2(x-3)<0$的解是________。

<解析>

原式=$(x+1)(x-1)(x+2)^2(x-3)<0$

∴$x<-2$或$-2<x<-1$或$1<x<3$

6. 已知$\frac{xy}{x+y}=2$，$\frac{yz}{y+z}=3$，$\frac{zx}{z+x}=4$，則x=________。

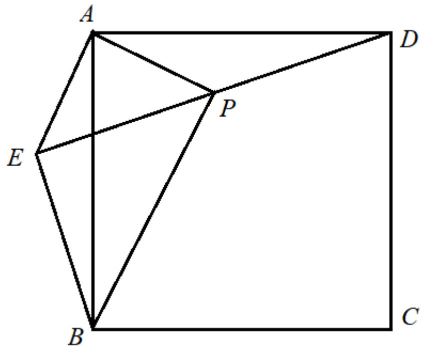
<解析>

$\frac{xy}{x+y}=2\rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$，$\frac{yz}{y+z}=3\rightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$，$\frac{zx}{z+x}=4\rightarrow\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$，

$\frac{2}{x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$，$x=\frac{24}{5}$

新加坡 決賽 8 年級
Singapore Final (Grade 8)

7. Point E is located outside (外面) square (正方形) ABCD. Now connect (連接) AE, BE and DE, and from point A, draw a line to DE, which intersect at (相交於) point P and AP⊥AE. If AE=AP=1, PB=$\sqrt{5}$, then among the following five statements, enumerate (列舉) all the statements (序號) that are true (正確的)?



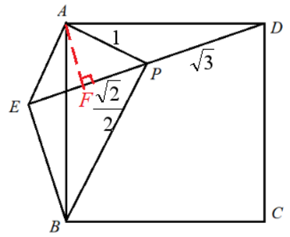
①△APD≅△AEB；

②The distance (距離) from point B to line AE is $\sqrt{2}$；

③EB⊥ED

④$S_{\triangle APD}+S_{\triangle APB}=1+\sqrt{6}$

⑤$S_{ABCD}=4+\sqrt{6}$



<解析>

①△APD≌△AEB（SAS）；

③∠AEB=∠DPA=135°，所以∠PEB=90°；

②△PEB是直角三角形，所以BE=$\sqrt{3}$，所以點B到直線AE的距離為$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$；

④$S_{\Delta APD}+S_{\Delta APB}=S_{四边形AEBP}=S_{\Delta AEP}+S_{\Delta BEP}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{6})$；

⑤過A作DE的垂線，垂足為F. $AF=PF=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$DF=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$AD^2=AF^2+DF^2=4+\sqrt{6}$，所以

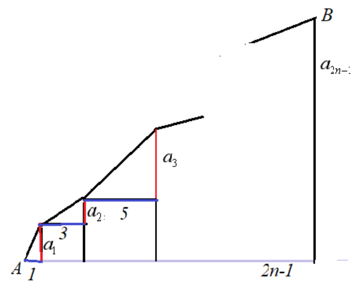
$S_{正方形ABCD}=AD^2=4+\sqrt{6}$

正確的有①③⑤

8.正實數a_1、a_2、a_3、……、a_n滿足$\sum_{i=1}^{n} a_i=17$，且$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+(2i-1)^2}$的最小值為整數，則$n$=________。

<解析>

把和式中的每一項$t_i=\sqrt{a_i^2+(2i-1)^2}$看成以$a_i$和$(2i-1)$為直角邊的直角三角形的斜邊長，所以所求和式為折線段AB的長度，和式取最小值，即為線段AB的長度，所以最小值為$\sqrt{1+n^4}$，所以$\sqrt{17^2+n^4}$是整數，設$m=\sqrt{17^2+n^4}$，則$(m+n^2)(m-n^2)=17^2$，解得$\begin{cases} m=145 \\ n^2=144 \end{cases}$，所以$n=12$



三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 如圖 1，點 B 是線段 AC 的中點，點 D 是線段 CE 的中點。四邊形 BCGF 和 CDHN 都是正方形，AE 的中點是 M，將 CE 繞點 C 順時針旋轉一個銳角如圖 2，試說明圖 2 中 FM 和 MH 的數量關係和位置關係，並證明你的結論。

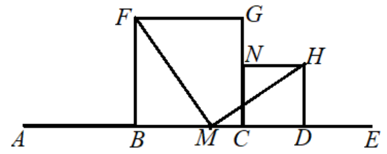


圖 1

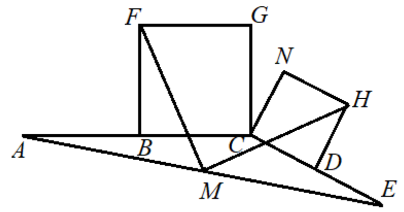


圖 2

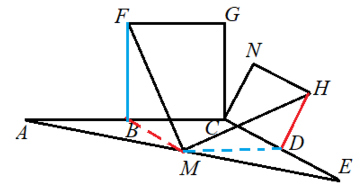
<解析>

連接 BM,DM. $BM=\frac{1}{2}CE=DH$,

$MD=\frac{1}{2}AC=FB$,

△FBM≌△MDH（SAS）

$FM=MH$, $\angle BMF=\angle DHM$, $\angle BFM=\angle DMH$所以$\angle FMH=90°$，綜上$FM=MH, FM\perp MH$.



2. 設 $f(m)$表示正整數 m 各位數字之積，求方程 $f(m)=m^2-10m-36$ 的正整數解。

<解析>

設 m= $a_k a_{k-1}\ldots a_1$，且 a_k、……$a_1 \in \{0,\ldots,9\}$, $a_k\neq 0$

0 則若 $k=1$，$f(m)=a_k=m$，

若 $k\geq 2$，$f(m)=a_k a_{k-1}\ldots a_1 < a_k\times 10^{k-1}\leq a_k a_{k-1}\ldots a_1=m$，證畢.

由 $m^2-10m-36=f(m)\geq 0$ 及 $m>0$ 解得 $m\geq 13$

若 $m\geq 14$，則 $f(m)=m^2-10m-36\geq 14m-10m-36=m+3(m-12)>m$，矛盾。

當 $m=13$ 時，經檢驗成立。綜上，$m=13$.

新加坡 決賽 8 年級
Singapore Final (Grade 8)