Examinee 學生資料

Country/國家:____ City/市(省):____ School/學校:____

Name/姓名:____ Sex/性別:____ Instructor/指導老師:____

2019 第十五屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)

Fifteenth IMC International Mathematics Contest (Singapore)2019

國中三年級(決賽)試卷

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分　得分:____________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	A	C	A	A	D
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	7	$6\sqrt{30}$	10	5	1	5	$\frac{6}{17}$	$2+2\sqrt{13}$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 已知$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=A$，則$\frac{(b-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a-b)}{(c-a)(c-b)}=$____ 。
(A)A　(B)$\frac{A}{2}$　(C)2A　(D)$\frac{1}{A}$
<解析>
原式$=(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a})+(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})+(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a})=2A$
選C。

2. 已知二次函數$y=x^2+2x-3$ 上一點A到兩坐標距離相等，則這樣的點有____個。
(A)1　(B)2　(C)3　(D)4
<解析>
令x=y 或 x=-y
①$x=x^2+2x-3$，$x^2+x-3=0$，D>0，x有兩根
②$-x=x^2+2x-3$，$x^2+3x-3=0$，D>0，x有兩根
故有4個解，選D。

3. 若a、b、c滿足滿足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，則a、b、c滿足____ 。
(A)必有兩個數相等　(B)必有兩個數互為相反數
(C)必有兩個數互為倒數　(D)任何兩個數都不相等
<解析>
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$，$(a+b+c)(bc+ac+ab)=abc$
取a=1、b=-1，$[1+(-1)+c][(-c+c-1)=-c$ (合理)
故必有兩數互為相反數，選B。

4. 把二次函數$y=2x^2+x$的圖象關於y軸對稱，再向右移一個單位，得到的二次函數的方程式為______ 。
(A)$y=2x^2-5x+3$ (B)$y=2x^2+3x+1$ (C)$y=-2x^2-5x-3$ (D)$y=-2x^2-3x-1$
<解析>

x	-1	0	1
y	1	0	3

與y軸對稱

x	1	0	-1
y	1	0	3

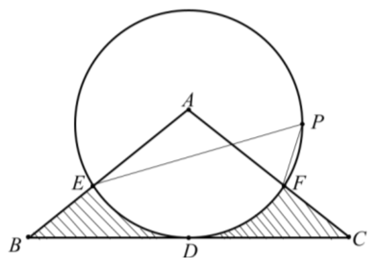
再向右移一個單位

x	2	1	0
y	1	0	3

$y=ax^2+bx+c$
①$1=4a+2b+c$ ②$0=a+b+c$ ③$3=0+0+c$
$4a+2b=-2$且$a+b=-3$，$2a+2b=-6$
$2a=4$，$a=2$，$0=2+b+3$，$b=-5$
$y=2x^2-5x+3$，選A。

5. 一個不透明的布袋裡裝有4個大小、質地均相同的乒乓球，每個球上面分別標有1、2、3、4，小林先從布袋中隨機抽取一個乒乓球，把球上的數記在紙上，然後把這個球放回袋中，再隨機抽取第二個乒乓球，並記錄下球上的數，則兩次取得乒乓球的數字之和不小於5的機率為_____ 。
(A)$\frac{3}{8}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C)$\frac{5}{8}$ (D) $\frac{9}{16}$
<解析>
滿足條件的抽取方法為(1, 4)、(2, 3)、(3, 2)、(4, 1)、(2, 4)、(3, 3)、(4, 2)、(3, 4)、(4, 3)、(4, 4)
共有10種
機率$=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$，選C。

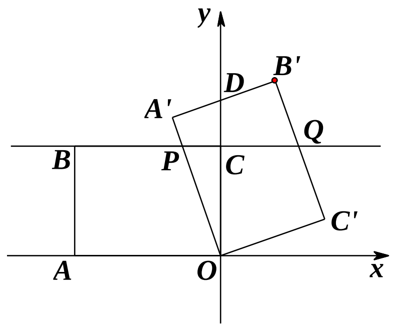
6. Refer to the figure, in △ABC, BC=4, point A is the center of a circle whose radius (半徑) is 2 units and tangent (正切) to BC at point D such that the given circle intersects (相交於) AB at E and AC at F. Let P lie on the circumference (圓周) of circle A and ∠EPF=50°. What is the area, in square units, of the shaded region?



(A)$4-\frac{10}{9}\pi$ (B) $4-\frac{5}{9}\pi$ (C) $4-\pi$ (D) $4-\frac{\pi}{2}$
<解析>
∠EPF=50°，∠BAC=100°
扇形$=2\times2\times\frac{100°}{360°}\times\pi=\frac{10}{9}\pi$
△ABC的面積$=4\times2\times\frac{1}{2}=4$

故斜線面積=4-$\frac{10}{9}\pi$，選A。

7. 如圖，在平面直角坐標中，矩形 OABC 的頂點 A、C 的坐標分別(-4, 0)和(0, 3)，將矩形 OABC 繞點 O 順時針旋轉α度，得到四邊形 OA′B′C′，邊 A′B′與 y 軸交於點 D，此時邊 OA′、B′C′分別與 BC 邊所在的直線交於點 P、Q，則$\frac{\overline{PQ}}{\overline{OD}}$的值是________。



(A)$\frac{3}{4}$ (B)$\frac{3}{5}$ (C)$\frac{4}{5}$ (D)1

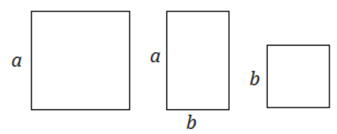
<解析>

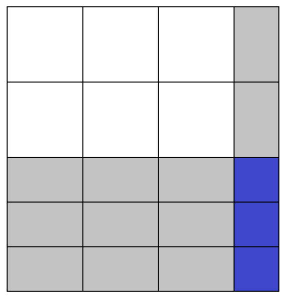
由旋轉角可知∠PQB′=α，故Pqsinα=A′B′=6

因為∠A′DO=90°-∠A′OD=∠AOA′=α

所以ODsinα=OA′=8，兩式相除即可，選A。

8. 已知$(2a+3b)(3a+b)=6a^2+3b^2+11ab$可看做把6個邊長為$a$、3個邊長為$b$的正方形與11個長寬分別為a和b的矩形模組拼成一個長寬分別為$3a+b$與$2a+3b$的大矩形，右圖為符合題意的一個拼接方案，若同等大小與形狀的模組認為是無差別的，且不考慮旋轉和對稱，那麼共有____種拼接方案。





(A)10 (B)20 (C)1024 (D)10240

<解析>

考慮直行，$\frac{5!}{2!3!}=10$；考慮橫列，$\frac{4!}{3!}=4$，有5列

則有4^5，共有$4^5\times10=10240$種

選D。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

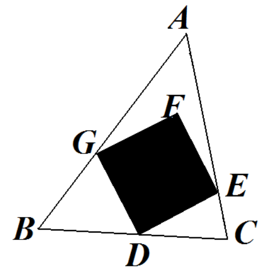
1. 已知 x_1、x_2 是$(x-2)(x-5)=a$ $(a>0)$的兩個根，則 x_1+x_2=________。

<解析>

原式$=x^2-7x+10=a$，$x^2-7x+(10-a)=0$

$x_1+x_2=-\frac{c}{a}=-(-7)=7$

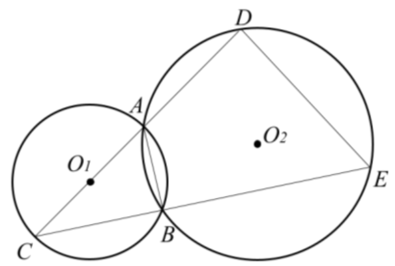
2. Square DEFG is located inside △ABC as shown in the right, such that G, D, E lie on the side of AB, BC, CA, respectively, F is an interior point, D is the midpoint of BC, AG=7, BG=6, AE=8, CE=3. What is the area, in square units, of the plain portion (空白部分) in the diagram?



<解析>

將△DEC 繞 D 順時針旋轉 180°至△DHB，連接 GH，則△GDH 為等腰直角三角形，AC//BH，△EGH 的面積即為正方形 DEFG 的面積.則由餘弦定理得$7^2+8^2-2\times7\times8\cos A=3^2+6^2+2\times3\times6\cos A$，解得$\cos A=\frac{17}{37}$，$\sin A=\frac{6\sqrt{30}}{37}$，所以所求面積即為$S_{\triangle AGE}+S_{\triangle BGH}=\frac{1}{2}(7\times8+3\times6)\sin A=6\sqrt{30}$.

3. In the figure, circle O_1 and circle O_2 intersect (相交於) in two points A and B, the diameter (直徑) AC of circle O_1 intersects circle O_2 at point D, the extension (延長線) of CB intersect circle O2 at point E. Connect AB, DE. Given, AB=3, BC =4, and DE =6, what is the length at CE?



<解析>

因為圓O_1的一條直徑為AC，故∠ABC=90°，$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=5$

因為∠ABC=∠CDE，∠C=∠C，△ABC~△EDC

$\therefore\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$，即$\frac{\overline{CE}}{5}=\frac{6}{3}$，$\overline{CE}=10$

4. 如果點$P(x_1, n)$和點$Q(x_2, n)$在函數$y=mx^2-4mx$ $(m\neq0)$的圖像上，$\overline{PQ}=2a$且$x_1>x_2$，則$x_1^2+ax_2-6a+1$的值為_______。

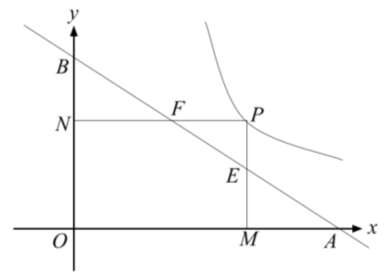
<解析>

由$PQ=2a$ 且$x_1>x_2$，可知$x_1-x_2=2a$

得知$x_1+x_2=4$，解得$x_1=2+a$，$x_2=2-a$

$(2+a)^2+a(2-a)-6a+1=4+4a+a^2+2a-a^2-6a+1=5$

5. 如圖，動點P在函數$y=\frac{1}{2x}$的圖像上，$PM\perp x$軸於點M，$PN\perp y$軸於點N，線段PM、PN分別與直線$y=-x+1$交於點E、F，則$\overline{AF}\cdot\overline{BE}$的值是______。



<解析>

設P(m, $\frac{1}{2m}$)，則E(m, 1-m)，F(1-$\frac{1}{2m}$, $\frac{1}{2m}$)

$\overline{AF}=\sqrt{2}\frac{1}{2m}$，$\overline{BE}=\sqrt{2}m$，則$\overline{AF}\times\overline{BE}=1$

6. 已知方程(x-1)(x-2)=M的兩根是α、β，則方程$(x-\alpha)(x-\beta)=-M$的兩根的平方和為________。

<解析>

設方程$(x-\alpha)(x-\beta)=-M$的兩根為s、t

得s+t=α+β=3，αβ=2-M，st=αβ+M=2

故$s^2+t^2=(s+t)^2-2st=3^2-2\times2=5$

7. 如圖，圓O中有直徑AB、EF和弦BC，且BC交E於點D，點D是弦BC的中點，$\overline{CD}=4$，$\overline{DF}=8$，則$\tan\angle DAO$的值為________。

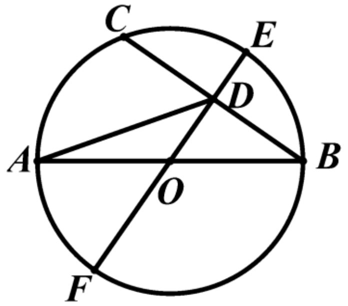
<解析>

$\overline{DE}\times\overline{DF}=\overline{CD}\times\overline{BD}$，$\overline{DE}\times8=4\times4$，$\overline{DE}=2$

故圓的半徑$r=\frac{\overline{FD}+\overline{DE}}{2}=5$，$\overline{OD}=r-\overline{DE}=3$

$\overline{BC}\perp\overline{EF}$，作$\overline{DG}\perp\overline{BO}$於G，$\overline{DG}=\frac{\overline{OD}\times\overline{BD}}{\overline{OB}}=\frac{12}{5}$

$\overline{DG}=\frac{\overline{OD}^2}{\overline{OB}}=\frac{9}{5}$，則$\tan\angle DAO=\frac{DG}{AG}=\frac{DG}{AO+OG}=\frac{\frac{12}{5}}{5+\frac{9}{5}}=\frac{6}{17}$



8. 把RT△ABC放在直角坐標系內，$A(1, 0)$、$B(4, 0)$點C在x軸上方，∠CAB=90°，$\overline{BC}=5$，將△ABC沿x軸向左移動，直到點C落在拋物線$y=x^2-x+1$上，則線段BC掃過的面積為________。

<解析>

令$x^2-x+1=4$，解得$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$，段段BC掃過區域為平行四邊形，底邊$=1-\frac{1-\sqrt{13}}{2}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$，高為4

故面積$=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\times4=2+2\sqrt{13}$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 以梯形 ABCD 的下底 BC 上一點為圓心作半圓，此半圓與這個梯形的上底 AD 和兩腰$\overline{AB}$、$\overline{CD}$都相切，求證$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}$。

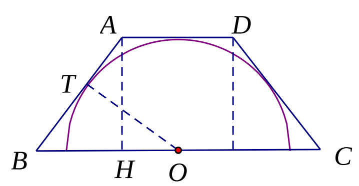
<解析>

設半圓與 AB 切於 T 點，作$\overline{AH}\perp\overline{BC}$於 H

得$\overline{AH}=R=\overline{OT}$，又∠B=∠B，∠AHB=90°=∠BTO

△AHB≅△OTB(AAS)，$\overline{AB}=\overline{BO}$，同理$\overline{CD}=\overline{CO}$

所以$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BO}+\overline{OC}=\overline{BC}$



2. 已知 $a\neq b$，$a^2(b+c)=b^2(a+c)=1$，求 $c^2(a+b)-abc$。

<解析>

$a^2(b+c)-b^2(a+c)=0$，$(a-b)(ab+bc+ca)=0$

由 $a\neq b$，$ab+bc+ca=0$

$c^2(a+b)-b^2(a+c)=(c-b)(ab+bc+ca)=0$

$c^2(a+b)=1$

$c^2(a+b)-abc=c^2(a+b)+(bc+ca)c=2c^2(a+b)=2$