Examinee 學生資料

Country/國家:______ City/市(省):______ School/學校:______

Name/姓名:______ Sex/性別:______ Instructor/指導老師:______

2020 第十六屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)

Sixteenth IMC International Mathematics Contest (Singapore)2020

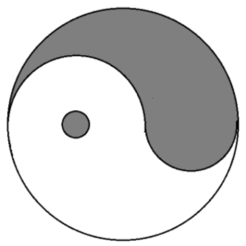
國中三年級(決賽)試卷

考試時間:90 分鐘　　卷面總分:100 分　　得分:____________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	C	B	D	D	C
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	42877	1620	2 或-3	0 或 ±1	74	$\frac{1}{2}$	a	990

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

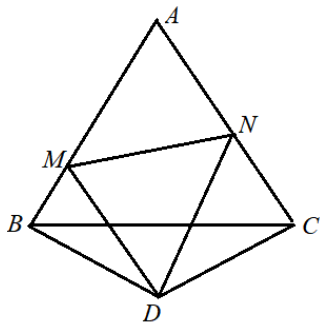


1. 右圖是由直徑分別為1cm、4cm、6cm、10cm的四個圓或半圓組成的圖形。則圖中陰影部分的面積為(　　　)cm^2。
(A)$\frac{41}{4}\pi$　(B)41π　(C) $\frac{21}{2}\pi$　(D)10π

<解析>

$5\times5\times\pi\times\frac{1}{2}-3\times3\times\pi\times\frac{1}{2}+2\times2\times\pi\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\pi\times\frac{1}{2}\times2$

$=(25-9+4+\frac{1}{2})\times\pi\times\frac{1}{2}=10\frac{1}{4}\pi$，選A。



2. In the figure, △ABC is an equilateral triangle (等邊三角形) with side length (邊長) 6cm, ∠BDC=120° and BD=DC. Now, make a 60° angle with point D as its vertex (頂點), and the two sides of the angle intersect (交) AB and AC at points M and N, respectively. If we connect MN to from △AMN, then what is the perimeter (周長), in cm, of △AMN?
(A)9　(B)10　(C)11　(D)12

<解析>

由題意∠ABD=∠ACD=90˚，把△DBM 繞點 D 順時針旋轉到△DCP，使得 P 在 AC 延長線上。

可以證明△DNM≌△DNP(SAS)

所以 MN=NP=NC+CP=NC+BM，

△AMN 的周長為△ABC 的兩條邊的長度和，選 D。

3. 方程$\sqrt{ax^2+ax+2}=ax+2$有唯一實根，則實數a的取值範圍是(　　　)。
(A) $a=-8$ 或$a=1$　(B)$a=-8$或$a\geq1$　(C) $a\geq1$　(D)$a>1$

<解析>

原式: $ax^2+ax+2=(ax+2)^2$

$ax^2+ax+2=a^2x^2+4ax+4$

$(a^2-a)x+3ax+2=0$　且$ax+2\geq0$

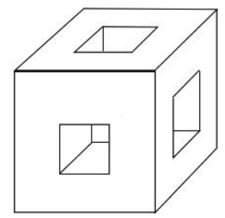
①當$a^2-a=0$，$a=0$或$a=1$，則$a=1$(合理)

②當$a^2-a\neq0$，$D=(3a)^2-8(a^2-a)=0$，$a^2+8a=0$，$a=-8$

$(3a)^2-8(a^2-a)>0$，則$a<-8$或$a>0$

且$ax^2+ax+2>0\rightarrow a(x+\frac{a}{2})^2+2+\frac{a}{4}>0$

則$(a^2-a)\left[(a^2-a)\frac{4}{a^2}+3a\left(-\frac{2}{a}\right)+2\right]<0$，得解$a>1$，故取值範圍$a=-8$或$a\geq1$，選B。



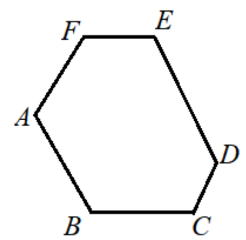
4. 把一個邊長為3公分的正方體六個面的中心位置挖去6個邊長為1公分的正方體，做成一種模具，它的表面積是(　　)平方公分。
(A)54 (B)72 (C)78 (D)84

<解析>

$3\times3\times6=54$

$1\times1\times4\times6=24$

$54+24=78$，選C。



5. In the figure, ABCDEF is a hexagon (六邊形) such that ∠A=∠B=∠C=∠D=∠E=∠F, $AB+BC=11$ and $FA-CD=3$. What is the value of $BC+DE$? (A)12　(B)14　(C)15　(D)16

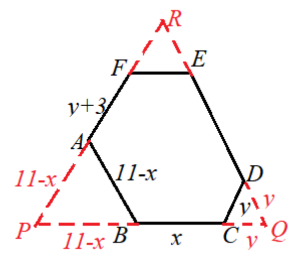
<解析>

已知△ABP、△REF、△DQC 為正△

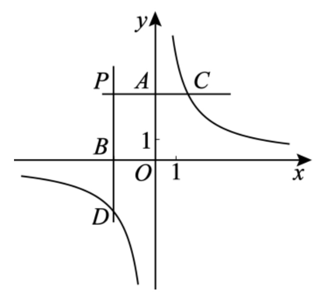
設 BC=x，CD=y，

RP=RQ=PQ=11+y，RF=x-3

DE=11-(x-3)=14-x，BC+DE=14，選 B。



6. 如果自然數 a 的各個數字之和等於 10，那麼稱 a 為"十全數"，將所有十全數從小到大排成一列，2026 排在這一列數中的第(　　　)個。
(A)48 (B)77 (C)120 (D)121



<解析>

1 位數 0 個

2 位數 19、28、37、46、55、64、73、82、91，共 9 個

3 位數 a+b+c=10，C_2^{12}-11-1=54

4 位數 1def，d+e+f=9，C_2^{11}=55

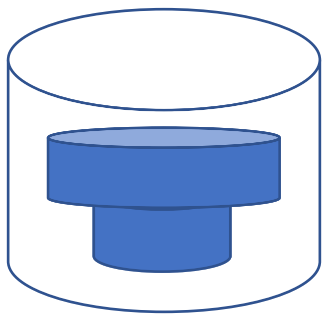
4 位數 2def，2008、2017、2026

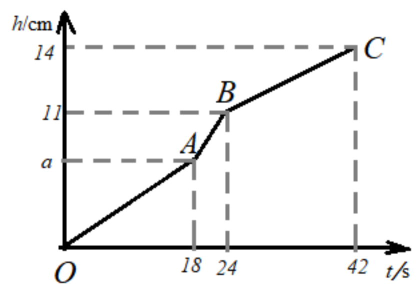
共有 9+54+55+3=121 個，選 D。

7. 如圖，分別過第二象限內的點 P 作 x、y 軸的平行線，與 y、x 軸分別交於點 A、B 與雙曲線$y=\frac{6}{x}$分別交於點 C、D。則下列結論正確的是(　　)。
(A)不存在點 P，使 $S_{四邊形OAPB}=S_{\triangle ACD}$　(B)存在唯一點 P，使 $S_{四邊形OAPB}=S_{\triangle ACD}$
(C)存在兩個點 P，使 $S_{四邊形OAPB}=S_{\triangle ACD}$　(D)存在無數個點 P，使 $S_{四邊形OAPB}=S_{\triangle ACD}$

<解析>
設 P(m, n)，m<0，n>0
A(0, n)，B(m, 0)，C($\frac{6}{n}$, n)，D(m, $\frac{6}{m}$)
$S_{四邊形OAPB}=-mn$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times\frac{6}{n}\times(n-\frac{6}{m})=3-\frac{18}{mn}$
令$-mn=3-\frac{18}{mn}$，mn=-6(取負)，此時 m, n 有無數組解，選 D。

8. 底面積為 30cm^2 的空圓柱形容器內，水平放置著由兩個實心圓柱組成的幾何體，現將容器內均速注水，注滿為止，在注水過程中，水面高度 h(cm)與注水時間 t(s)之間的關係如圖所示，若幾何體下方的圓柱的底面積為 15cm^2，則幾何體上方的圓柱的高度為(　　)cm。 (A)7　(B)6　(C)5　(D)4





<解析>
(14-11)×30÷(42-24)=5
5×18=a(30-15)，a=6
11-6=5，選 C。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 設正整數 a、b、c、d 滿足 $a^5=b^4$，$c^3=d^2$，且 $c-a=73$，則 $d-b$=_______。
<解析>
令 $a=m^4$，$b=m^5$，$c=n^2$，$d=n^3$
$c-a=n^2-m^4=(n+m^2)(n-m^2)=73$
$n+m^2=73$
$n-m^2=1$
∴$n=37$，$m^2=36$
∴$d-b=37^3-6^5=50563-7776=42877$

2. 小明與小紅進行乒乓球比賽，當小明 2:7 落後的時候叫了一次暫停，上演驚天逆轉，最終小明以 11:9 獲勝，那麼整個比賽進行的過程中，比分有_______種不同順序。
<解析>
最後比數➔10:9
小明要追 10-2+1=9，對手 9-7=2
$C_2^9 C_2^{10}=\frac{9\times8}{2\times1}\times\frac{10\times9}{2\times1}=1620$

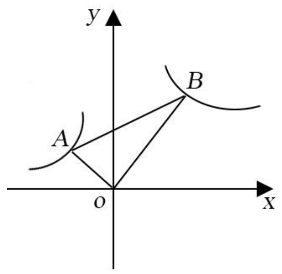
3. 若$a^3+a^2-3a+2=\frac{3}{a}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}$，則$a+\frac{1}{a}$=_______。
<解析>
原式$=a^3+\frac{1}{a^3}+(a^2+\frac{1}{a^2})-3(a+\frac{1}{a})+2=0$
令$a+\frac{1}{a}=t$ ($t\geq2$ 或 $t\leq-2$)
$t^3-3t+(t^2-2)-3t+2=0$➔$t(t-2)(t+3)=0$
∴t=2 或 t=-3

4. 已知 a、b、c 是非零實數，且 $a^2+b^2+c^2=1$，$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$，則 $a+b+c$=_______。
<解析>
$\frac{ab+ac}{bc}+\frac{ab+bc}{ac}+\frac{ac+bc}{ab}=\frac{a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2}{abc}=-3$，
$a^2b+c^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2=-3abc$，
$b-b^3+c-c^3+a-a^3=-3abc\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=a+b+c$
因為$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$
所以$a+b+c=0$ 或$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=1$，
即$a+b+c=0$ 或$ab+ac+bc=0$
所以$a+b+c=0$ 或$(a+b+c)^2-1=0$,
所以$a+b+c=0$ 或 ±1

5. 對於一個正整數 n，如果能找到兩個正整數 a、b，使得 $n=a+b+ab$，則稱 n 為一個"好數"。如 5=1+2+1×2，則 5 是一個"好數"，那麼不超過 100 的好數有_______個。
<解析>
n+1=a+b+ab+1=(a+1)(b+1)，且 n+1 是合數
故 2、3、4、...、101，共有 26 個質數，最小的好數是 3
則滿足條件的好數個數=100-26=74

新加坡 決賽 9 年級
Singapore Final (Grade 9)

6. 如圖，在平面直角坐標系 xOy 中，直角三角形頂點與原點 O 重合，頂點 A、B 恰好分別落在函數$y=-\frac{1}{x}(x<0)$，$y=\frac{4}{x}(x>0)$的圖像上，則 tan∠ABO 的值為_______ 。



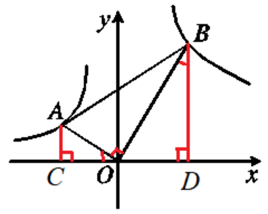
<解析>

設$A\left(m,-\frac{1}{m}\right),B\left(n,\frac{4}{n}\right)$，$m<0,n>0$

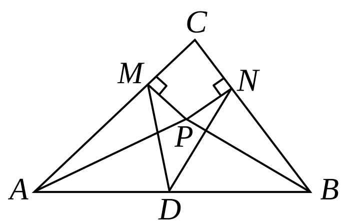
△BDO∽△OCA

$\Rightarrow \frac{BD}{OC}=\frac{DO}{CA}\Rightarrow\frac{4}{-mn}=-mn\Rightarrow mn=-2$

$tan\angle ABO=\frac{OA}{OB}=\frac{AC}{OD}=-\frac{1}{mn}=\frac{1}{2}$



7. As shown in the figure, point P is inside △ABC such that ∠PAC=∠PBC. Now, from point P, draw perpendicular lines (垂線) to BC and CA, which intersects the lines at points N and M, respectively. If D is the midpoint (中點) of AB, and let DM=a, then what is the length of DN?

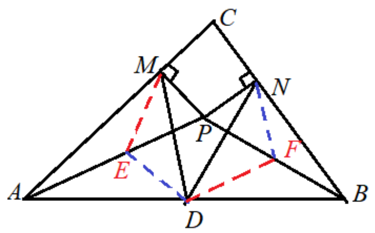


<解析>

取 AP,BP 的中點 E,F，

連接$ME,DE,DF,NF.$

∴△DEM≅△NFD，所以$DN=DM=a$



8. 盒子中裝有紅藍兩種除顏色外都相同的小球，總數不超過 2020 個，隨機取出 2 個，它們同色的概率為$\frac{1}{2}$，則盒子中紅球數量的最大值是_______ 。

<解析>

設 x、y 分別為盒子中紅藍球的數量，取出不同顏色的概率是$\frac{1}{2}$

則$\frac{xy}{C_2^{x+y}}=\frac{1}{2}$，$(x-y)^2=x+y$，所以小球總數是一個完全平方數，令 n=x-y

$n^2=x+y\leq 2020$，$x=\frac{n^2+n}{2}$，n≤44，x 的最大值=990

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 在矩形 ABCD 的兩邊 AB 和 BC 上分別向矩形外作正三角形 ABE 和 BCF，連接 FC 和 EA 並延長交於 M，求證:

(1) ∠EMF=30°

(2) EF=EC=AF=DF=DE

(3) BE 分別是∠CFE 的角平分線

<解析>

(1) ∠EMF=∠ADC-∠DAM-∠DCM

=90°-(180°-90°-60°)-(180°-90°-60°)=30°

(2) BC=BF，∠EBC=90°+60°=150°

∠EBF=360°-∠CBF-∠EBC=150°

又 EB=EB，故△EBC≅△EBF(SAS)

∴EF=FA，同理 CE=EF

且∠ABF=150°=∠BCF，AB=CD，BF=CF

∴△ABF≅△BCF(SAS)

故 AF=DF，同理 ED=EC，則 EF=EC=AF=DF=DE。

(3)由△EBC≅△EBF(SAS)➔∠CEB=∠FEB，即 BE 是是∠CFE 的角平分線

2. 已知關於 x、y、z 的方程 $2x^2+1=y^2+z^2$ (*)

(1)找出一組正整數(x, y, z)使得(*)成立

(2)證明: 有無窮多組正整數(x, y, z) 使得(*)成立

<解析>

(1) $(x, y, z)=(6, 8, 3)$，答案不唯一，以閱卷驗證為準。

(2)任取正整數 n，令$(x, y, z)=(n^2+n, n^2+2n, n^2-1)$

則 $2x^2+1=2(n^2+n)^2+1=2n^4+4n^3+2n^2+1$

$y^2+z^2=(n^2+2n)^2+(n^2-1)^2=n^4+4n^3+4n^2+n^4-2n^2+1=2x^2+1$

因為正整數 n 有無限多個，所以有無限多組正整數解(x, y, z)得證。