



2019 第十五屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)
Fifteenth IMC International Mathematics Contest (Singapore)2019

國中一年級(決賽)試卷

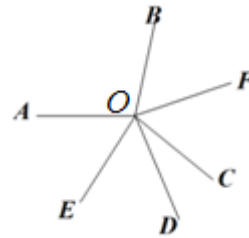
考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分 得分:_____

- ◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	A	C	C	B	A	A	B
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	9	1	$\frac{43}{105}$	48	1010	$11\frac{1}{2048}$ 或 $\frac{22529}{2048}$	-1	$\frac{5}{7}$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. There are 6 rays (射線) OA, OB, OC, OD, OE and OF all with point O as their vertex (頂點) and $\angle AOB=100^\circ$, OF bisect (平分) $\angle BOC$, $\angle AOE=\angle DOE$, $\angle EOF=140^\circ$. Find the size of $\angle COD$. (A) 20° (B) 30° (C) 40° (D) 60°



<解析>

令 $\angle BOF=x$, $\angle AOE=y$

① $100+x+y+140=360 \rightarrow x+y=120$

② $\angle COD=140-x-y=140-(x+y)=140-120=20$

選A。

2. 不相等的實數 a, b, c 在數軸上對應的點分別為 A, B, C, 若 $|a-b|+|a-c|=|b-c|$, 則這三個點排在中間的點為()。

(A)點A (B)點B (C)點C (D)不確定

<解析>

若A為最大值, $B>C$

則 $a-b+a-c=b-c$, $2a=2b$, $a=b$ (不合)

若 $B>A>C$

則 $-a+b+a-c=b-c$ (合理) \rightarrow 則A在兩點之間

選A。

3. A、B兩車分別從相距c公里的兩地出發，若同向而行，則m小時後，A可以追上B；若相向而行，則n小時後，A、B兩車相遇，A、B兩車同時從一處出發，一小時後，A、B兩車行駛的路程之比為()。

(A) $\frac{m}{n}$ (B) $\frac{n}{m}$ (C) $\frac{m+n}{m-n}$ (D) $\frac{m-n}{m+n}$

<解析>

設A、B兩車速度分別為 v_1, v_2

① $(v_1-v_2)m=c$

② $(v_1+v_2)n=c$

$(v_1-v_2)m=(v_1+v_2)n$, $v_1m-v_2m=v_1n+v_2n$

$v_1m-v_1n=v_2m+v_2n$

$v_1(m-n)=v_2(m+n)$

$\frac{v_1}{v_2}=\frac{m+n}{m-n}$ (路程比=速度比), 選C。

4. 已知 $a+b+c=0$, $abc<0$, 則 $\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}+\frac{|c|}{c}+\frac{ab}{|ab|}+\frac{|ac|}{ac}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{|abc|}{abc}$ 的值为()。

(A)7 (B)1 (C)-1 (D)-7

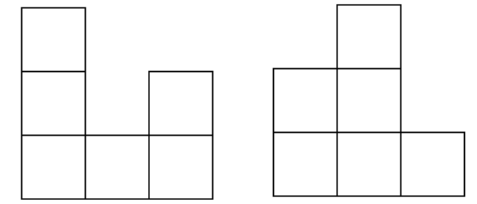
<解析>

依題意, a, b, c 為2正1負, 令a為正, b為正, c為負

$\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}+\frac{|c|}{c}+\frac{ab}{|ab|}+\frac{|ac|}{ac}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{|abc|}{abc}=1+1-1+1-1-1=-1$, 選C。

5. 已知一個立體圖形由若干小正方體堆積而成，其主視圖(從前往後看)、左視圖(從左往右看)如圖所示，則這些小正方體最多()個。

(A)12 (B)14 (C)15 (D)16



主視圖

左視圖

<解析>

		2
3		
	1	

2	1	2
3	1	2
1	1	1

最多14塊, 選B。

6. 直線 $y=2x+1$ 關於原點的對稱直線為()。

(A) $y=2x-1$ (B) $y=-2x+1$ (C) $y=-\frac{1}{2}x+1$ (D) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

<解析>

取兩點(0, 1)及(1, 3) \rightarrow 對稱點(0, -1)及(-1, -3)

$y=ax+b$ 代入(0, -1)及(-1, -3)

$-1=b$

$-3=-a-1$, $a=2$

則直線方程式: $y=2x-1$, 選A。

7. 已知關於x, y的二元一次方程組 $\begin{cases} 2x+3y=k \\ x-2y=1 \end{cases}$ 的解為 $\begin{cases} x=m \\ y=n \end{cases}$ ，且m, n互為倒數，則k

的值为()。
 (A) $\frac{11}{2}$ 或-5 (B) $\frac{11}{2}$ (C) -5 (D) $-\frac{11}{2}$ 或5

<解析>

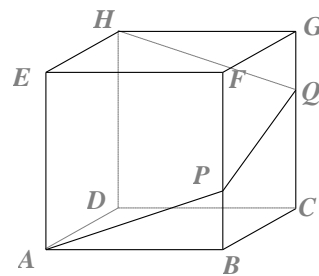
因為m、n互為倒數，令 $x=\frac{1}{n}$ ， $y=n$

$\frac{1}{n}-2n=1 \rightarrow 1-2n^2=n$ ， $2n^2+n-1=0$ ， $(2n-1)(n+1)=0$ ， $n=\frac{1}{2}$ 或-1

則 $k=2 \times 2+3 \times \frac{1}{2}=\frac{11}{2}$ 或 $k=2 \times (-1)+3 \times (-1)=-5$

選A。

8. As shown in the figure, a paper cuboid (正方體) ABCD-EFGH (with open top and bottom cover) (上下無底), two points P, Q are on the edge (棱) FB, GC, respectively and $FP=2PB$, $GQ=\frac{1}{2}QC$. If the cube is cut (裁剪) and expend (展開) along the fold line (折線) AP-PQ-QH, what is the resulting plane figure (平面圖形)?



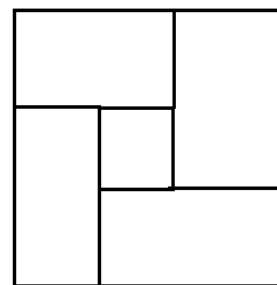
(A) a hexagon (六邊形) (B) a parallelogram (平行四邊形)
 (C) two right triangle (直角三角形) (D) a right triangle and a right trapezoid (直角梯形)

<解析>

選B，平行四邊形。

二、填充題(每題5分，共40分)

1. It is known that the center portion (中間位置) of large rectangle (矩形) shown in the figure is a square with side length (邊長) of 1 unit and is surrounded by four small rectangles (矩形) having a length to width ratio (長寬比) of 2:1, what is the area (面積) of the large rectangle?



<解析>

設長方形的長=a，寬=b

$a-b=1$ 且 $a:b=2:1$ ， $a=2b$

$2b-b=1$ ， $b=1$ ， $a=2$

故大矩形 $=(a+b)^2=(1+2)^2=9$

2. 將100減去它的 $\frac{1}{2}$ ，再減去餘下的 $\frac{1}{3}$ ，再減去餘下的 $\frac{1}{4}$ ，……，以此類推，直至減去餘下的 $\frac{1}{100}$ ，最後的得數是_____。

<解析>

$$100 \times (1-\frac{1}{2}) \times (1-\frac{1}{3}) \times (1-\frac{1}{4}) \times \dots \times (1-\frac{1}{100}) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{99}{100} = 1$$

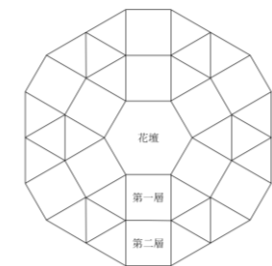
最後得數是1。

3. 計算 $1-\frac{1}{2-\frac{1}{3-\frac{1}{5^4}}}$ 的值为_____。

<解析>

$$\frac{1}{5}-4=-\frac{3}{5}=-\frac{19}{5}, 3+\frac{5}{19}=\frac{62}{19}, 2-\frac{19}{62}=\frac{105}{62}, 1-\frac{62}{105}=\frac{43}{105}$$

4. 有一個正六邊形花壇，周圍用相等邊長的正三角形、正方形磚塊按圖示方法從花壇向外鋪，第四層共需磚_____塊。



<解析>

正方形 $=1 \times 6=6$

正三角形，依規律1、3、5、7，故 $7 \times 6=42$

第四層共需要 $42+6=48$ 塊

5. 當 $x=_____$ 時， $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\dots+|x-2019|$ 取得最小值。

<解析>

x為數線上之動點，當x為兩點之間的中點時，其距離之和為最小值

當 $1 \leq x \leq 2019$ ，則x取 $(2019+1) \div 2=1010$ 為最小值

$$6. 1+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\frac{31}{32}+\frac{63}{64}+\frac{127}{128}+\frac{255}{256}+\frac{511}{512}+\frac{1023}{1024}+\frac{2047}{2048}=_____。$$

<解析>

$$12-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}+\frac{1}{2048}\right)$$

$$=12-\left(1-\frac{1}{2^{11}}\right)=11\frac{1}{2^{11}}=11\frac{1}{2048}=\frac{22529}{2048}$$

7. 若對於任意實數 a, b , $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$ 恆為關於 x, y 的二元一次方程式 $(a-b)x-(a+b)y=a+b$ 的解, 則 $x_0+y_0=$ _____。

<解析>

$$(a-b)x-(a+b)y=a+b \rightarrow ax-ay-a=bx+by+b, a(x-y-1)=b(x+y+1)$$

$$\text{則 } x-y-1=0 \text{ 且 } x+y+1=0, 2x=0, x=0, y=-1$$

$$\text{故 } x+y=x_0+y_0=0+(-1)=-1$$

8. 當 $x \neq 0$ 時, $\frac{2|x|-3x}{|2x-5x|}$ 的最大值為_____。

<解析>

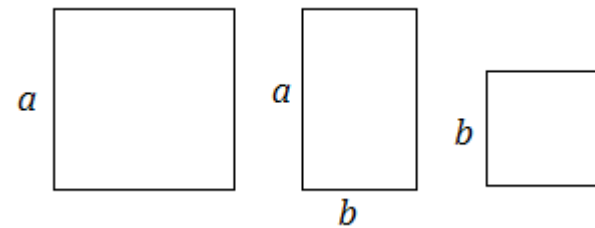
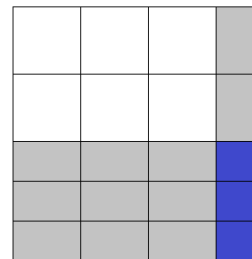
$$\text{當 } x > 0, \frac{2x-3x}{|2x-5x|} = \frac{-x}{3x} = -\frac{1}{3}; \text{ 當 } x < 0, \frac{-2x-3x}{|2x+5x|} = \frac{-5x}{-7x} = \frac{5}{7};$$

三、計算題(每題 10 分, 共 20 分)

1. 已知式子 $(2a+3b)(3a+b)=6a^2+3b^2+11ab$ 可看做把 6 個邊長為 a 、3 個邊長為 b 的正方形與 11 個長寬分別為 a 和 b 的矩形模組拼成一個長寬分別為 $3a+b$ 與 $2a+3b$ 的大矩形, 畫出一個符合題意的拼接方案。

<解析>

如圖表示, 同行同列可以互換順序。



2. $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數, 解關於 x 的方程 $[2x]+[3x]=8x-\frac{7}{2}$ 。

<解析>

$$2x-1 \leq [2x] \leq 2x, \text{ 且 } 3x-1 \leq [3x] \leq 3x$$

$$5x-2 \leq [2x]+[3x] \leq 5x$$

$$5x-2 \leq 8x-\frac{7}{2} \leq 5x, \text{ 且 } 8x-\frac{7}{2} \text{ 是整數}$$

$$10x-4 \leq 16x-7 \leq 10x$$

$$3 \leq 6x, \frac{1}{2} \leq x; 6x \leq 7, x \leq \frac{7}{6}$$

$$\text{得 } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{6}, \frac{1}{2} \leq 8x-\frac{7}{2} \leq 5\frac{5}{6}$$

$$8x-\frac{7}{2}=1, 2, 3, 4, 5$$

$$\text{當 } 8x-\frac{7}{2}=1 \text{ 時, } x=\frac{9}{16} \text{ (不合)}$$

$$\text{當 } 8x-\frac{7}{2}=2 \text{ 時, } x=\frac{11}{16} \text{ (不合)}$$

$$\text{當 } 8x-\frac{7}{2}=3 \text{ 時, } x=\frac{13}{16} \text{ (合理)}$$

$$\text{當 } 8x-\frac{7}{2}=4 \text{ 時, } x=\frac{15}{16} \text{ (不合)}$$

$$\text{當 } 8x-\frac{7}{2}=5 \text{ 時, } x=\frac{17}{16} \text{ (合理)}$$

$$\text{原方程式的解為 } x=\frac{13}{16} \text{ 或 } x=\frac{17}{16}$$