

國中一年級(決賽)試卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分 得分:_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

| | | | | | | | | |
|-----|----------------|----------|-----------------------------------|---|---|-----|---|--------------------|
| 選擇題 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 答案 | A | A | A | B | B | D | B | B |
| 填充題 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 答案 | $-\frac{1}{2}$ | 22446686 | $-5 \leq x < 1$ $3 < x \leq 9$ | 2 | 4 | 101 | 4 | -2 或 $2 \leq x$ |

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 規定 $(a, b) \otimes (c, d) = (\frac{a+c}{2}, \frac{b-d}{2})$ ，如果 $(x, 3) \otimes (2, y) = (2, 3)$ ，則 $x+y =$ ()。
(A)-1 (B)4 (C)-3 (D)0

<解析>

$$(x, 3) \otimes (2, y) = (\frac{x+2}{2}, \frac{3-y}{2}) = (2, 3)$$

$$\frac{x+2}{2} = 2, x=2; \frac{3-y}{2} = 3, y=-3$$

則 $x+y=2+(-3)=-1$ ，選A。

2. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020}) (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2019}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020}) (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2019}) =$ ()。

(A) $\frac{1}{2020}$ (B) $-\frac{1}{2020}$ (C) $\frac{4039}{4080400}$ (D) $-\frac{1}{4080400}$

<解析>

$$\text{令 } x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020}, y = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2019}$$

$$\text{原式} = x(1+y) - (1+x)y = x+xy-y-xy = x-y$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2019})$$

$$= \frac{1}{2020}, \text{選A。}$$

3. 若方程 $||x-3|-2|=a$ 有三個不同的整數解，則 a 的值为 ()。

(A)2 (B)3 (C) ± 2 (D)1

<解析>

$$\textcircled{1} |x-3|-2=a, |x-3|=a+2, x=3 \pm (a+2) \rightarrow x=5+a \text{ 或 } 1-a$$

$$\textcircled{2} |x-3|-2=-a, |x-3|=-a+2, x=3 \pm (-a+2) \rightarrow x=5-a \text{ 或 } 1+a$$

當 $a=2, x=7$ 或 -1 或 3 (符合)，則 $a=2$

4. 現有1克、2克、5克、10克、20克的砝碼各1個，已知物品只能放在天平的左側，砝碼只能放在天平右側，則不算0克，最多可以秤量()種重量的物品。
(A)5 (B)31 (C)32 (D)16

<解析>

$5+10+10+5+1+31$ ，選B。

5. In the figure, point P is inside a square (正方形) ABCD that has side length (邊長) of 1 cm. If points A_1 and A_2 are midpoints(中點) of sides AD and BC respectively, and points $B_1, B_2, C_1,$ and C_2 trisect(三等分) sides AB and CD respectively, then what is the (面積) in cm^2 , of the shaded region(陰影部分)?

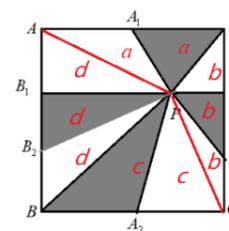
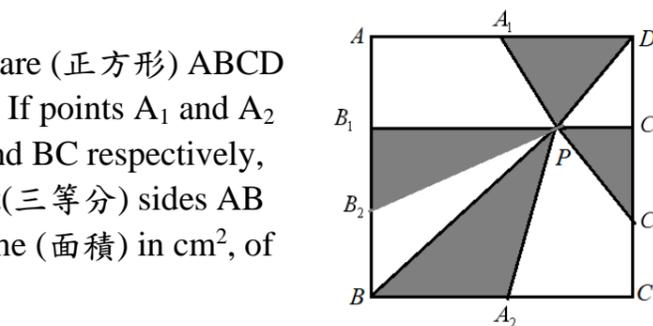
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

<解析>

字母相同，面積相等

$$2(a+c) = \frac{1}{2}, 3(b+d) = \frac{1}{2}$$

$$\text{則 } a+b+c+d = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}, \text{選B。}$$



6. 設 x 是實數， $y = |x-1| + |x+1|$ ，下列四個結論，其中正確的是 ()。

(A) 沒有最小值

(B) 只有一個 x 使 y 取到最小值

(C) 有3個 x 使 y 取到最小值

(D) 有無數多個 x 使 y 取到最小值

<解析>

y 表示數線上到 -1 和 1 兩點的距離之和，所以當 $-1 \leq x \leq 1$ 時，和最小值 $= 2$ 。

選D。

7. 兩個瓶子裝了相同質量的鹽水，甲瓶中鹽和水的質量之比為 $p:1$ ，乙瓶鹽和水的質量之比為 $q:1$ ，如果這兩個瓶子的鹽水全部混合在一起，在這混合液中鹽與水的質量之比為 ()。
(A) $\frac{p+q}{2}$ (B) $\frac{p+q+2pq}{p+q+2}$ (C) $\frac{p^2+q^2}{p+q}$ (D) $\frac{2pq}{p+q}$

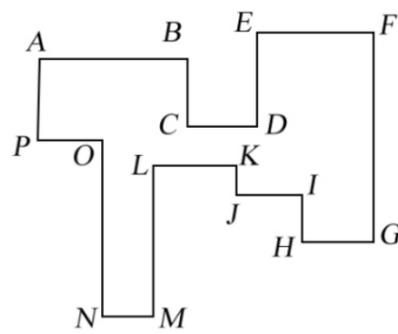
<解析>

假設質量都是 a ，甲瓶鹽的質量: $\frac{pa}{p+1}$ ，乙瓶鹽的質量: $\frac{qa}{q+1}$ ，

$$\frac{\frac{pa}{p+1} + \frac{qa}{q+1}}{\frac{a}{p+1} + \frac{a}{q+1}} = \frac{2pq+p+q}{p+q+2}, \text{選B。}$$

Country/國家: _____ City/市(省): _____ School/學校: _____
 Name/姓名: _____ Sex/性別: _____ Instructor/指導老師: _____
 Examinee 學生資料

8. In the figure, there are 16 line segment (線段), where every pair of two adjacent (相鄰) line segments are perpendicular (垂直) to each other. In order to (為了) be able to calculate (計算) the perimeter (周長) of the figure, find the minimum (最少) number of line segments that must be measured (測量). (A)5 (B)6 (C)7 (D)8



<解析>

求AB線段、BC線段、CD線段、EF線段、FG線段、LM線段這六條線段長，即可求出一圈的周長，選B。

二、填充題(每題5分，共40分)

1. 已知 $\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{x}}}} = \frac{7}{16}$ ，則 $x =$ _____。

<解析>

$$\text{原式} = \frac{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{x}}}}{1} = \frac{16}{7}, \frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{x}}} = \frac{2}{7}, \frac{3+\frac{1}{4+\frac{1}{x}}}{1} = \frac{7}{2}, \frac{1}{4+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$4+\frac{1}{x} = 2, \frac{1}{x} = -2, x = -\frac{1}{2}$$

2. 2, 20, 202, 2020, 20202, 202020, 2020201, 20202019 這八個數的和為_____。

<解析>

$$2+20+202+2020+20202+202020+2020201+20202019=22446686$$

3. 不等式 $1 < |x-2| \leq 7$ 的解是_____。

<解析>

$$\textcircled{1} 1 < |x-2| \rightarrow x-2 > 1 \text{ 或 } x-2 < -1, x > 3 \text{ 或 } x < 1$$

$$\textcircled{2} |x-2| \leq 7 \rightarrow -7 \leq x-2 \leq 7, -5 \leq x \leq 9$$

取值範圍: $-5 \leq x < 1$ 或 $3 < x \leq 9$

4. 已知 a, b, c 三個數的積是負數，其和是正數，當 $x = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$ 時，代數式 $x^{2019} - 2x^{2020} + 3$ 的值是_____。

<解析>

$$\text{取 } a=1, b=-2, c=4, \text{ 則 } x = \frac{1}{|1|} + \frac{-2}{|-2|} + \frac{4}{|4|} = 1$$

$$x^{2019} - 2x^{2020} + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$$

5. 有若干堆圍棋子，每堆棋子數一樣多，且每堆中白子都占28%，小明從某一堆中拿走了一半棋子，而且拿走的都是黑子，現在，在所有的棋子中，白子占32%，則共有棋子_____堆。

<解析>

設有 x 堆棋子，每堆棋子有 y 顆

$$xy \times 0.28 = (x-0.5)y \times 0.32$$

$$0.28xy = 0.32xy - 0.16y$$

$$0.04xy = 0.16y, x = 4$$

6. 已知 $a = \frac{11 \times 66 + 12 \times 67 + 13 \times 68 + 14 \times 69 + 15 \times 70}{11 \times 65 + 12 \times 66 + 13 \times 67 + 14 \times 68 + 15 \times 69} \times 100$ ，則 a 的整數部分是_____。

<解析>

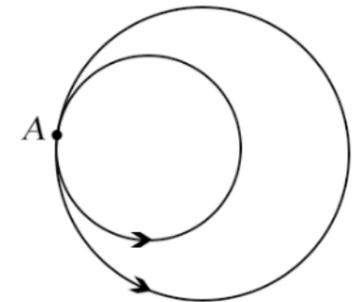
$$a = \frac{11 \times 65 + 12 \times 66 + 13 \times 67 + 14 \times 68 + 15 \times 79 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15}{11 \times 65 + 12 \times 66 + 13 \times 67 + 14 \times 68 + 15 \times 69} \times 100,$$

$$a = \left(1 + \frac{11 + 12 + 13 + 14 + 15}{11 \times 65 + 12 \times 66 + 13 \times 67 + 14 \times 68 + 15 \times 69} \right) \times 100,$$

$$a = 100 + \frac{11 \times 100 + 12 \times 100 + 13 \times 100 + 14 \times 100 + 15 \times 100}{11 \times 65 + 12 \times 66 + 13 \times 67 + 14 \times 68 + 15 \times 69}, a = 101 + \frac{11 \times 35 + 12 \times 34 + 13 \times 33 + 14 \times 32 + 15 \times 31}{11 \times 65 + 12 \times 66 + 13 \times 67 + 14 \times 68 + 15 \times 69}$$

故整數部分=101

7. As shown in the figure, two circles (圓) share a common point (公共點) at A. It is known that the diameter (直徑) of the larger circle is 48 cm, while the diameter of the smaller circle is 30 cm. If two beetles (甲蟲) depart from A (從A出發) at the same time at the same speed (速度) but travelling on different circles in the direction of the arrow (沿著箭頭方向), then the two beetles should be able to travel along the circle at least (至少) how many times so that they will be farthest apart (距離最遠) for the first time (首次)?



<解析>

$$\text{當小圓上甲蟲爬了4圈, } 4 \times 30 \times \pi = \square \times 48 \times \pi, \square = 2.5$$

當小圓上的甲蟲走回到A點，而大圓上甲蟲至大圓直徑另一端B點，兩蟲相距最遠，爬了4圈。

8. 解方程 $|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x+2$ 。

<解析>

$$\textcircled{1} x \leq -1, -x-1+x-3x+3+2x-4=x+2, 2x+4=0, x=-2$$

$$\textcircled{2} -1 < x \leq 0, x+1+x-3x+3+2x-4=x+2, 0x-2=0, x \text{ 不合}$$

$$\textcircled{3} 0 < x < 1, x+1-x-3x+3+2x-4=x+2, 2x=-2, x=-1 \text{ (不合)}$$

$$\textcircled{4} 1 \leq x < 2, x+1-x+3x-3+2x-4=x+2, 4x=8, x=2$$

$$\textcircled{4} 2 \leq x, x+1-x+3x-3-2x+4=x+2, 0x=0, x \text{ (合理)}$$

則取值範圍 -2 或 $2 \leq x$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 已知 A 為 x 軸負半軸上一點，B 為 x 軸正半軸上一點，C(0, -2)，D(-3, -2)。

(1) 如圖 1，若 $AC \perp BC$ ，作 $\angle CBA$ 的平分線交 CO 於 P，交 CA 於 Q，判斷 $\triangle CPQ$ 是什麼三角形？證明你的結論。

(2) 如圖 2，若 $\angle ADC = \angle DAC$ ，點 B 在 x 軸正半軸上運動， $\angle ACB$ 的平分線 CE 交 DA 的延長線於點 E，在 B 點的運動過程中， $\frac{\angle E}{\angle ABC}$ 的值是否發生變化？若不變，求其值；若變化，請說明理由。

<解析>

(1)
 $\because \angle BOC = \angle BCQ = 90^\circ$ 且 $\angle ABQ = \angle CBQ$
 $\therefore \angle BPO = \angle CQB \rightarrow \angle CQP = \angle CPQ$
 即 $\triangle CPQ$ 是等腰三角形

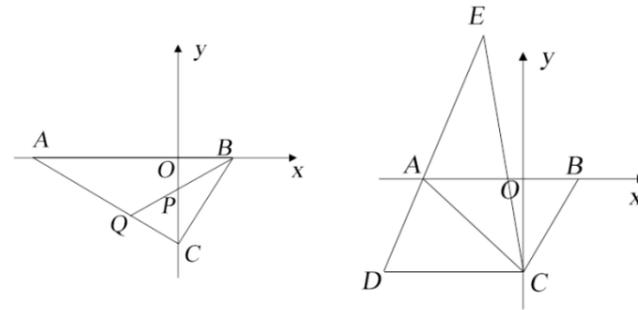
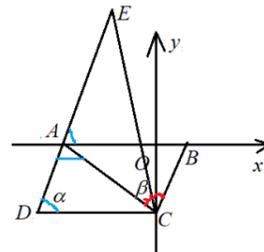


圖 1

(2)
 設 $\angle CDA = \alpha$ ， $\angle ECA = \beta$
 所以 $\angle DAC = \angle E + \angle ACE$
 $\angle E = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
 則 $\angle BAC = \angle ACD = 180^\circ - 2\alpha$ ， $\angle ABC = 2(\alpha + \beta)$
 $\frac{\angle E}{\angle ABC} = \frac{1}{2}$ 是定值。

圖 2



2. 有 6 個相同的長、寬、高分別是 5 公分、4 公分、3 公分的長方體，把它們的某些面染上紅色，使得第一個長方體只有 1 個面是紅色的，第二個長方體恰有 2 個面是紅色的，第三個長方體恰有 3 個面是紅色的，第四個長方體恰有 4 個面是紅色的，第五個長方體恰有 5 個面是紅色的，第六個長方體 6 個面都是紅色的，染色後把所有長方體均分割成邊長為 1 公分的小正方體，考慮不同的染色方案，分割完畢後，恰有一面是紅色的小正方體最多有多少個？

<解析>

第 1 個長方體，取 5×4 的面是紅色，最多 $5 \times 4 = 20$

第 2 個長方體，取 5×4 的面是紅色，最多 $5 \times 4 \times 2 = 40$

第 3 個長方體，取 5×4 、 4×3 的面是紅色，最多 $5 \times 4 \times 2 + 4 \times 3 - 4 \times 4 = 40 - 4 = 36$

第 4 個長方體，取 5×4 、 4×3 的面是紅色，最多 $5 \times 4 \times 2 + 4 \times 3 \times 2 - 4 \times 4 \times 2 = 40 - 8 = 32$

第 5 個長方體，取 5×4 、 4×3 、 5×3 的面是紅色，最多 $(3-2) \times (5-2) + (4-1) \times (5+5+3+3-2 \times 4) = 27$

第 6 個長方體，取 5×4 、 4×3 、 5×3 的面是紅色，最多 $2 \times [(3-2) \times (5-2) + (5-2) \times (4-2) + (4-2) \times (3-2)] = 22$
 最多 $20 + 40 + 36 + 32 + 27 + 22 = 177$ 個