2022 第十八屆IMC國際數學競賽複賽(台灣)
2022 Eighteenth International Mathematics Contest (Taiwan)

國中三年級試卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：＿＿＿＿＿＿＿　准考證號碼：＿＿＿＿＿＿＿　試卷總分：＿＿＿＿＿＿＿

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	B	A	C	A	A	B	A	D
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	$4\sqrt{11}$	$130°$	4	$-\frac{8}{3}$	-111	4	1:2:4	10

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 如圖，有一正方形 PQRS 在半圓內，P、S 兩點在直徑上，Q、R 兩點在半圓圓弧上，若半圓的半徑是 10，那麼正方形 PQRS 的面積是多少? (A)100 (B)80 (C)50 (D)60

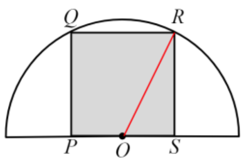
<解析>

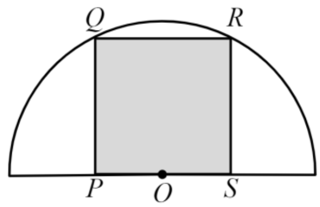
假設 $\overline{OS}=x$ ， $\overline{RS}=\overline{PS}=2x$

$\therefore 10^2=x^2+(2x)^2 \rightarrow 100=5x^2$ ， $x=\sqrt{20}$

正方形 PQRS 的面積= $(2x)^2=(2\sqrt{20})^2=80$

選 B。





2. 若直角△ABC 中，若 $\angle A=90°$， $\overline{AB}=4$， $\overline{AC}=3$，D、E 分別是 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 之中點， $\overline{DF}\perp\overline{BC}$ ， $\overline{EG}\perp\overline{BC}$ ，求四邊形 DEGF 之面積=? (A)3 (B)4 (C) $\frac{25}{12}$ (D) $\frac{25}{18}$

<解析>

$\overline{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

△ABC~△ADE

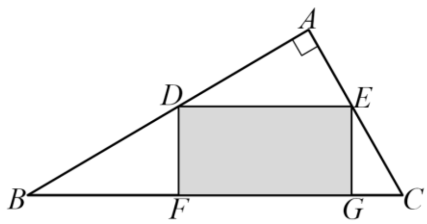
$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{2}{\overline{DE}}$ ， $\overline{DE}=2.5$ ， $\overline{AE}=\sqrt{2.5^2-2^2}=1.5$

同理

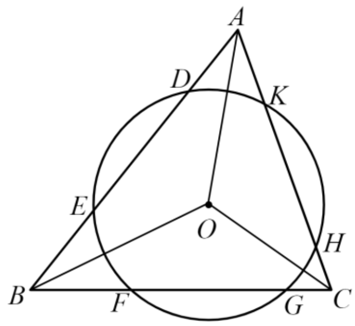
△ADE~△FBD

$\therefore \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DF}} \Rightarrow \frac{2.5}{1.5}=\frac{2}{\overline{DF}}$ ， $\overline{DF}=1.2$

$\therefore$四邊形 DEGF=1.2×2.5=3，選 A。



3. 如右圖，以△ABC 為三內角平分線的交點 O 為圓心，並作一圓 O 交△ABC 的三邊於 D、E、F、G、H、K，則下列哪一個敘述不正確?



(A)O 為△ABC 的內心 (B) $\Delta AOB:\Delta BOC=\overline{AB}:\overline{BC}$

(C) $\overline{DE}=\overline{HK}>\overline{FG}$ (D) $\overline{DE}=\overline{FG}=\overline{HK}$

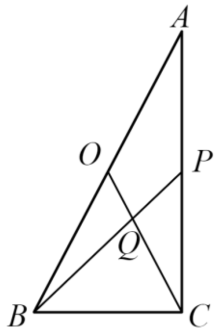
<解析>

三內角平分線的交點為內心，且到三邊等距離

故圓 O 的弦 $\overline{DE}$ 、 $\overline{FG}$ 、 $\overline{HK}$ 的弦心距都相等

$\therefore \overline{DE}=\overline{FG}=\overline{HK}$ ，選 C。

4. 如右圖，直角△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$ ，且 O 為外心，P 為 $\overline{AC}$ 中點，$\overline{CO}$ 與 $\overline{BP}$ 交於 Q，若四邊形 APQO 的面積為 a ，則△ABC 面積和△BOC 的面積之差為何? (A) $\frac{3}{2}a$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (C) $\frac{1}{2}a$ (D) $\frac{1}{3}a$



<解析>

∵O 和 P 為中點

∴Q 為△ABC 的重心

且四邊形 APQO 的面積為 a→△ABC=$\frac{a}{2}\times 6=3a$

△BOC=$3a\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}a$

➔△ABC 面積和△BOC 的面積之差=$3a-\frac{3}{2}a=\frac{3}{2}a$ ，選 A。

5. 設 a>b>0，$a^2+b^2=3ab$ ，則 $\frac{a+b}{a-b}$ 的值為? (A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $2\sqrt{2}$

<解析>

$a^2+b^2=3ab$

① $a^2+b^2-2ab=ab$ ， $(a-b)^2=ab$ ， $a-b=\sqrt{ab}$

② $a^2+b^2+2ab=5ab$ ， $(a+b)^2=5ab$ ， $a+b=\sqrt{5ab}$

$\therefore \frac{a+b}{a-b}=\frac{\sqrt{5ab}}{\sqrt{ab}}=\sqrt{5}$ ，選 A。

6. 化簡 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}=$________。(A) $2\sqrt{2}$ (B)1 (C) $1+\sqrt{2}$ (D) $3-2\sqrt{2}$

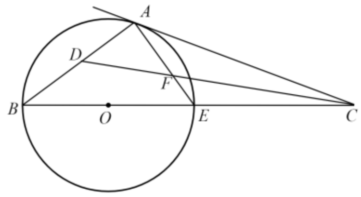
<解析>

$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{6-2\sqrt{8}}=\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{1})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}=\left|\sqrt{2}-1\right|+\left|2-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}=1$

選 B。

7. As shown in the figure, it is known that point C is on the extension line (延長線) of the diameter of circle O. $\overline{CA}$ is tangent circle O at point A, and the bisector (平分線)of $\angle ACB$ intersects $\overline{AE}$ and $\overline{AB}$, points F, and D respectively, then $\angle ADF$ is ________. (A) 45° (B) 50° (C) 48° (D) 40°

<翻譯>如圖，已知 C 點在圓 O 的直徑 $\overline{BE}$ 的延長線上，$\overline{CA}$ 切圓 O 於 A 點，$\angle ACB$ 的平分線分別交 $\overline{AE}$ 、 $\overline{AB}$ 於點 F、D，則 $\angle ADF$ 的度數為?



<解析>

$\because$ $\overline{CA}$ 為切線， $\angle CAE = \angle ABE$

且 $\overline{CD}$ 為角平分線， $\angle ACD = \angle DCB$

$\therefore$ $\angle AEB = \angle CAE + \angle ACE = \angle ABE + 2\angle DCB$

△ABE 中， $\angle BAE + \angle ABE + \angle AEB = 180^\circ$ ， $\angle ABE + \angle AEB = 90^\circ$

$\therefore$ $\angle ABE + \angle ABE + 2\angle DCB = 90^\circ$ ， $\angle ABE + \angle DCB = 45^\circ$

故 $\angle ADF = \angle ABE + \angle DCB = 45^\circ$ ，選 A。

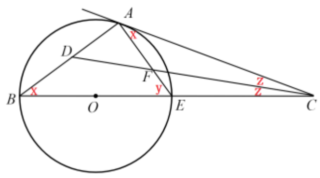
<另解>

x+y=90(△BAE)

x+2z=y(△ACE)

∴x+y=x+x+2z=90

x+z=45= $\angle ADF$

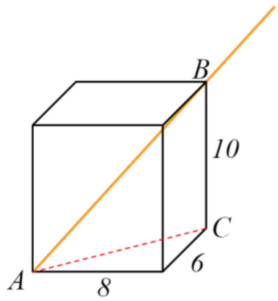


8. Put a 30-centimeter thin wooden stick into a lidless rectangular box with a length, width and height of 8, 6, and 10 centimeters. What is the shortest number of centimeters for the stick exposed outside the box? (A) $30-6\sqrt{5}$ (B) $30-10\sqrt{3}$ (C) $30-2\sqrt{41}$ (D) $30-10\sqrt{2}$

<翻譯> 將一根 30 公分的細木棍放入一個長、寬、高各為 8 公分、6 公分、10 公分的無蓋的長方體盒子中，則露出盒子外面的木棍最短是多少公分?

<解析>

如圖放置



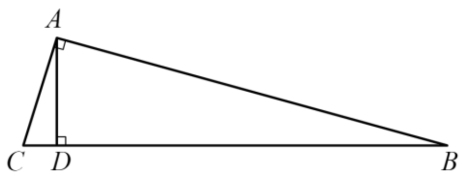
$\overline{AC} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$

$\overline{AB} = \sqrt{10^2+10^2} = 10\sqrt{2}$

露出盒子外面的長度= $30-10\sqrt{2}$ ，選 D。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 如右圖，△ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D，若 $\overline{BD}:\overline{BC} = 11:12$ ， $\overline{AC} = 4$ ，則 $\overline{AB}$ =______ 。



<解析>

假設 $\overline{BD} = 11a$ ， $\overline{BC} = 12a$

$\therefore$ $\overline{CD} = 12a - 11a = a$ ， $\overline{AD} = \sqrt{a \cdot 11a} = \sqrt{11}a$

$\therefore$ $\overline{AC} = \sqrt{a^2+11a^2} = 2\sqrt{3}a = 4 \rightarrow a = \dfrac{4}{2\sqrt{3}}$

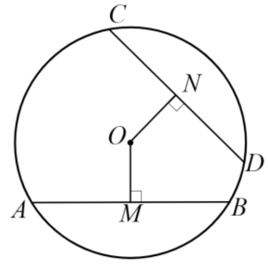
$\therefore \overline{AB}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{BD}^2}=\sqrt{11a^2+121a^2}=\sqrt{132}a=2\sqrt{33}a=2\sqrt{33}\times\frac{4}{2\sqrt{3}}=4\sqrt{11}$

2. 如右圖，$\overline{OM}\perp\overline{AB}$，$\overline{ON}\perp\overline{CD}$，$\overline{ON}=\overline{OM}$，若$\overset{\frown}{AB}=95°$，$\overset{\frown}{BD}=40°$，$\overset{\frown}{AC}=$________。

<解析>

$\because \overline{ON}=\overline{OM}$ ➔ $\overline{CD}=\overline{AB}$，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}=95°$

$\overset{\frown}{AC}$ =360-95×2-40=360-230=130



3. 設二次函數 $y=3(x-h)^2+k$ 的圖形最低點(-1, -12)，若此函數圖形交於 x 軸於 A、B，求 $\overline{AB}$ 的長度=_________。

<解析>

∵最低點(-1, -12)

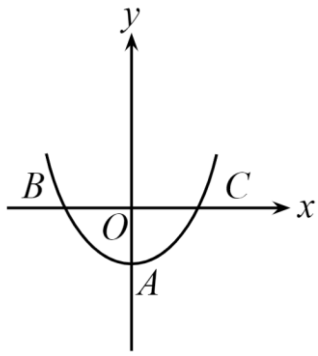
$\therefore y=3(x+1)^2-12$，交於 x 軸(y=0)

$\therefore 0=3(x+1)^2-12 \rightarrow (x+1)^2=4$，$x=1$ 或 $x=-3$

∴交於(1, 0) 和 (-3, 0)

$\overline{AB}=|1-(-3)|=4$

4. 如圖，二次函數 $y=ax^2+c$ 的圖形通過 B(-b, 0)、C(b, 0)兩點，並且其最低點為 A(0, -4)。若△ABC 的面積為 24，則 $a\times b\times c=$________。



<解析>

∵最低點為 A(0, -4)代入 $y=ax^2+c$

$\therefore c=-4$

且 B(-b, 0)、C(b, 0)➔ $\overline{BC}=2b$

$2b\times4\div2=24$，$b=6$→B(-6, 0) C(6, 0)代入 $y=ax^2-4$

$0=36a-4$，$a=\frac{1}{9}$

$\therefore a\times b\times c=\frac{1}{9}\times6\times(-4)=-\frac{8}{3}$

5. Let a, b be the two roots of $x^2+20x+1=0$ and c, d be the two roots of $x^2-17x+1=0$, then the value of $(a+c)(b+c)(a-d)(b-d)$ is ______.

<翻譯>設 a, b 是 $x^2+20x+1=0$ 的兩個根，c, d 是 $x^2-17x+1=0$ 的兩個根，則 $(a+c)(b+c)(a-d)(b-d)$ 的值為______。

<解析>

$a+b=-20$，$ab=1$；$c+d=17$，$cd=1$

$(a+c)(b+c)(a-d)(b-d)=[ab+(a+b)c+c^2][ab-(a+b)d+d^2]=(1-20c+c^2)(1+20d+d^2)$

$=1+20d+d^2-20c-400cd-20cd^2+c^2+20c^2d+c^2d^2$

$=d^2+c^2+2-400=(c+d)^2-400=17^2-400=-111$

6. Knowing that m is an integer, then make the equation $2x^2-5mx+2m^2=5$ have a total of ______ values of m which are integers.

<翻譯>已知 m 為整數，則使方程 $2x^2-5mx+2m^2=5$ 有一根為整數的 m 的值共有______個。

<解析>

$\Delta=(-5m)^2-4\times2\times(2m^2-5)=25m^2-16m^2+40=9m^2+40>0$

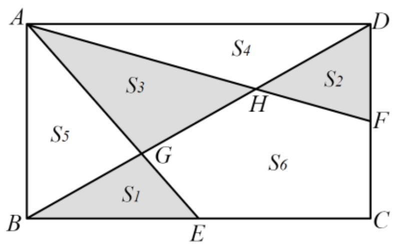
$\because$ 方程有一個整數根，設 $\Delta=p^2$

$\therefore (3m-p)(3m+p)=-40$

$\because 3m-p\le 3m+p$ 且同奇偶，$3m-p=-4$、-10、-2、-20 和 $3m+p=10$、4、20、2

$\therefore m=\pm3$、±1，共 4 個。

7. 如圖，在矩形 ABCD 中，E、F 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 的中點，$\overline{AE}$、$\overline{AF}$ 與對角線 $\overline{BD}$ 分別交於 G 點、H 點。則面積 $S_2:S_4:S_6=$________。



<解析>

$\overline{AD}//\overline{BC}$ 且 E 是 $\overline{BC}$ 的中點 $\rightarrow \overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

$\therefore \frac{\overline{AG}}{\overline{GE}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BE}}=\frac{2}{1}=2$，$\frac{\overline{BG}}{\overline{DG}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{AD}}=\frac{1}{2}\rightarrow \overline{BG}=\frac{1}{3}\overline{BD}$，同理 $\overline{DH}=\frac{1}{3}\overline{BD}$

$\therefore \overline{BG}=\overline{GH}=\overline{HD}$

$\because \overline{AD}//\overline{BC}$ ➔ $\triangle$BEG~$\triangle$DAG，$\frac{S_1}{S_3+S_4}=\frac{1}{4}$

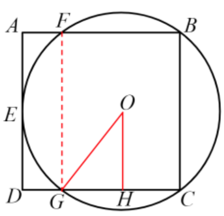
且 $\overline{BG}=\overline{GH}=\overline{HD}$，$S_5=S_3=S_4$，設 $S_1=x$，則 $S_5=S_3=S_4=2x$

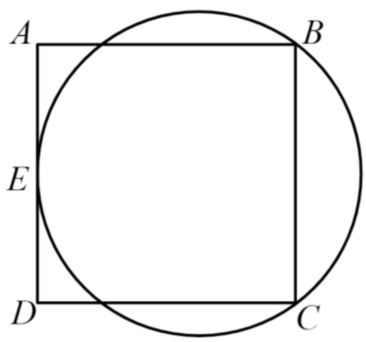
$\therefore$ 矩形面積 $S=12x$

同理可得: $S_2=x$，$S_1+S_2+S_3=x+x+2x=4x=\frac{1}{3}S$，$S_6=6x-x-x=4x$

$\therefore S_2:S_4:S_6=1:2:4$

8. 正方形 ABCD 一邊切圓於 E 點，如圖，其中正方形邊長是 16 公分，求圓的半徑是____公分。





<解析>

作 $\overline{OH}\perp\overline{GC}$ 且 $\overline{OC}=\overline{OG}$

$\therefore \overline{OH}$ 為中垂線 $\rightarrow$ 令 $\overline{HC}=\overline{HG}=a$

$\therefore \overline{DG}=16-2a$，且 E 為切點

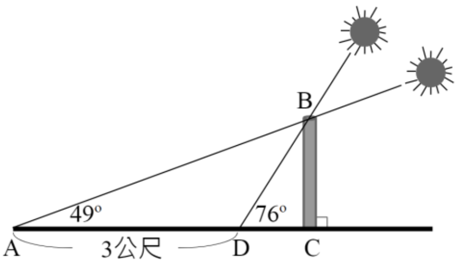
$\therefore \overline{ED}^2=\overline{DG}\times\overline{CD}$ ➔ $8^2=(16-2a)\times16$

$64=256-32a$，$32a=192$，$a=6$

$\therefore \overline{OG}^2=\overline{OH}^2+\overline{GH}^2 \rightarrow \overline{OG}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

三、計算題(10 分/10 分，共 20 分) ※未寫計算過程不予計分

1. 有竹竿立於地面，早上 10 時，測得太陽斜照與地面所夾角度為 $49°$，11 時再測得斜照角度為 $76°$，經測量知影長縮短了 3 公尺，如圖，求竹竿長?
(四捨五入取整數值) ($\tan 49° \fallingdotseq 1.2$， $\tan 76° \fallingdotseq 4.0$)



<解析>

設 $\overline{BC}=x$，$\overline{CD}=y$

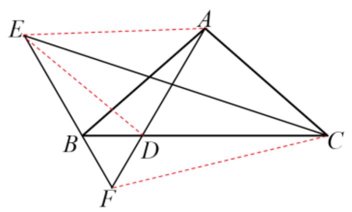
$\dfrac{x}{3+y}=\tan 49°=1.2$

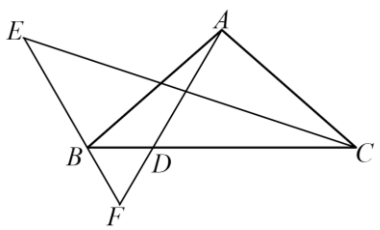
$\dfrac{x}{y}=\tan 76°=4$

$\begin{cases} x=3.6+1.2y \\ x=4y \end{cases} \Rightarrow 4y=3.6+1.2y$，$y=\dfrac{9}{7}$，$x=4\times\dfrac{9}{7}=\dfrac{36}{7}\fallingdotseq 5$(公尺)

2. 如圖，在等腰△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{5}$，D 為 $\overline{BC}$ 邊上異於中點的點，C 點關於直線 $\overline{AD}$ 的對稱點為 E 點，$\overline{EB}$ 的延長線與 $\overline{AD}$ 的延長線交於 F 點，求 $\overline{AD}\cdot\overline{AF}$ 的值?

<解析>





連接 $\overline{AE}$、$\overline{CF}$、$\overline{DE}$

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$

$\therefore \angle ABD=\angle ACB$

C 點關於直線 $\overline{AD}$ 的對稱點為 E 點

$\therefore \angle BED=\angle BCF$，$\angle AED=\angle ACD=\angle ABC$

$\therefore \angle BED=\angle BAD \rightarrow \angle BAD=\angle BCF$

A、B、F、C 四點共圓

$\therefore \angle AFB=\angle ACB=\angle ABD$

∴△AFB~△ABD

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AD}\cdot\overline{AF}=\overline{AB}^2=(\sqrt{5})^2=5$