

2022 第十八屆  國際數學競賽複賽(台灣)
2022 Eighteenth International Mathematics Contest (Taiwan)

國
中
二
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：_____ 准考證號碼：_____ 試卷總分：_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	B	D	C	C	A	B
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	50	30	25	513	26	16	$\frac{20}{9}$	2023、1

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 若 a 、 b 為相異整數，且 $a^2 + 2ab + b^2 + a + b = 0$ ，則數對 (a, b) 不可能為下列何者？
(A) $(7, -7)$ (B) $(9, -10)$ (C) $(-3, 3)$ (D) $(13, -12)$

<解析>

$$a^2 + 2ab + b^2 + a + b = 0$$

$$(a+b)^2 + (a+b) = 0$$

$$(a+b)(a+b+1) = 0$$

$$\therefore a+b=0 \text{ 或 } a+b+1=0$$

當 $(13, -12)$ 代入， $13-12+1 \neq 0$ ，選 D。

2. Two squares A and B are side by side and share a vertex. Which of the following cannot be the length of the line segment connected by any two points of the seven vertices?
(A) $\sqrt{20}$ (B) $\sqrt{40}$ (C) $\sqrt{52}$ (D) $\sqrt{70}$

翻譯：兩個正方形 A 和 B 並排並共用一個頂點。下列哪一項不能是七個頂點中任意兩點連接的線段的長度？

<解析>

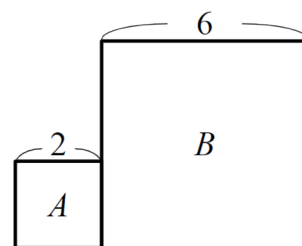
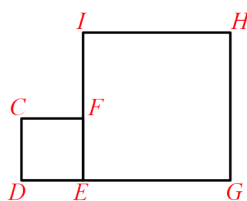
$$\overline{DF} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} ; \overline{DH} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100}$$

$$\overline{EH} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} ; \overline{CG} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68}$$

$$\overline{CI} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} ; \overline{CH} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$$

$$\overline{FH} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} ; \overline{DI} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$$

\therefore 不可能出現 $\sqrt{70}$ ，選 D。



3. 已知 $a-b=5$ ， $\sqrt{16+a} + \sqrt{b} = 7$ ，求 $\sqrt{16+a} - \sqrt{b}$ 之值為多少？(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7

<解析>

$$(\sqrt{16+a} + \sqrt{b})(\sqrt{16+a} - \sqrt{b}) = 16 + a - b$$

$$7 \times (\sqrt{16+a} - \sqrt{b}) = 16 + 5 = 21$$

$$\therefore (\sqrt{16+a} - \sqrt{b}) = 21 \div 7 = 3, \text{ 選 B。}$$

4. 頂尖航空公司規定乘客行李超過一定重量後，每公斤收取固定費用，即行李託運費與重量成線型函數關係：

行李重量(公斤)	28	29	30
託運費(元)	90	120	150

上表是行李重量與託運費部分資料，請問行李 36 公斤的託運費是多少元？

(A)240 (B)270 (C)300 (D)330

<解析>

令行李重量 x 公斤，託運費 y 元，則 $y = ax + b$

$$\begin{cases} 150 = 30a + b \\ 120 = 29a + b \end{cases} \rightarrow a = 30, b = -750$$

$\therefore y = 30x - 750$ ，當 $x = 36$ ， $y = 36 \times 30 - 750 = 1080 - 750 = 330$ ，選 D。

5. If a positive integer a is divided by seven natural numbers 2, 3, ..., 8, and the remainders are all 1, then the minimum value of a is _____. (A)839 (B)840 (C)841 (D)842

<翻譯>若一個正整數 a 被 2、3、.....、8 這七個自然數除，所得的餘數都為 1，則 a 的最小值是_____。

<解析>

$$[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] = 840$$

a 最小值 $= 840 + 1 = 841$ ，選 C。

6. 化簡 $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = ?$ (A) $2\sqrt{2} + 1$ (B) $2\sqrt{2} - 3$ (C) 1 (D) $3 - 2\sqrt{2}$

<解析>

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{2}-1| + |2-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1+2-\sqrt{2} = 1, \text{ 選 C。}$$

7. 若關於 x 的不等式組 $\begin{cases} 3-2x \leq 2 \\ x-m < 0 \end{cases}$ 的所有整數解的和是 10，則 m 的範圍是_____。

(A) $4 < m \leq 5$ (B) $1 < m < 5$ (C) $1 \leq m \leq 5$ (D) $\frac{1}{2} \leq m < 5$

<解析>

$$3-2x \leq 2 \rightarrow 2x \geq 1, x \geq \frac{1}{2}$$

$$x-m < 0 \rightarrow x < m$$

$\therefore m > x \geq \frac{1}{2}$ 且整數解的和是 10

$x = 1, 2, 3, 4$ ，故 m 的範圍是 $4 < m \leq 5$

8. 現有兩箱小球，若從第一箱取出 50 顆放進第二箱，則第二箱比第一箱多 1 倍，若從第二箱中取出一些放進第一箱，則第一箱比第二箱多 2 倍，則在第一箱的小球數最少的情況下，第二箱小球的個數是_____顆。(A)37 (B)38 (C)39 (D)40

<解析>

假設移動後的數量，第一箱為 x 顆，則第二箱為 $2x$ 顆
 故原來的數量，第一箱為 $x+50$ 顆，第二箱為 $2x-50$ 顆
 取一些數量 y 顆放入，第一箱為 $x+50+y$ 顆，第二箱為 $2x-50-y$ 顆
 則關係式: $x+50+y=(2x-50-y)\times 3$
 $\therefore x+50+y=6x-150-3y$ ， $5x-4y=200$ ， $5x=200+4y$ 且第一箱數量最少
 當 $y=5$ ， $x=44 \rightarrow$ 第一箱 $44+50=94$ ，第二箱 $88-50=38$ ，選 B。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 如右圖，ABCD 為正方形， $\overline{BC}=15$ 公分，PQRS 也是正方形， \overline{PQ} 在 \overline{BD} 上，R、S 兩點分別在 \overline{AD} 、 \overline{AB} 上，則正方形 PQRS 的面積是_____平方公分。

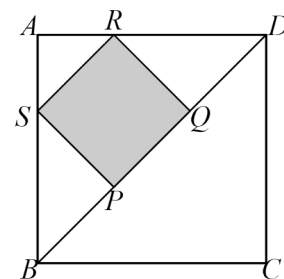
<解析>

令 $\overline{PQ} = x$ ， $\overline{BD} = 3x$

且 $\overline{BD} = \sqrt{15^2 + 15^2} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$

$\therefore 3x = 15\sqrt{2}$ ， $x = 5\sqrt{2}$

正方形面積 $= x^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$ 平方公分



2. 計算 $(42\frac{2}{3})^2 - 2 \times (42\frac{2}{3}) \times (38\frac{2}{3}) + (38\frac{2}{3})^2 + 5 \times (42\frac{2}{3}) - 5 \times (38\frac{2}{3}) - 6$ 的值为_____。

<解析>

令 $a = 42\frac{2}{3}$ ， $b = 38\frac{2}{3}$

$\therefore a^2 - 2ab + b^2 + 5a - 5b - 6 = (a-b)^2 + 5(a-b) - 6 = (a-b+6)(a-b-1)$

$\therefore (a-b+6)(a-b-1) = (42\frac{2}{3} - 38\frac{2}{3} + 6)(42\frac{2}{3} - 38\frac{2}{3} - 1) = 10 \times 3 = 30$

3. The picture of side-by-side rectangles on the right is composed of a regular hexagon with a side length of 1 cm. If the periphery of this figure represents the perimeter of the solid line part is 102 cm. How many regular hexagons are there in this figure? _____.

翻譯: 右邊的並排長方形圖片由邊長為 1 公分的正六邊形組成。如果這個圖的周長表示實線部分的周長是 102 公分。這個圖中有多少個正六邊形?

<解析>

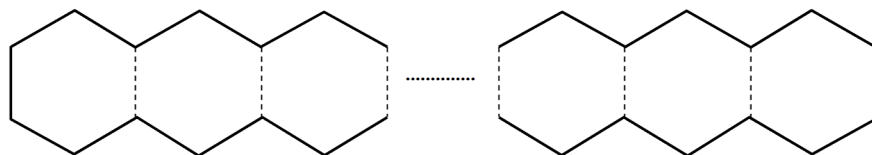
第一個周長 $a_1 = 6$

第二個周長 $a_2 = 6+4$

第三個周長 $a_3 = 6+4 \times 2$

\therefore 第 n 個周長 $a_n = 6+4 \times (n-1)$

$6+4 \times (n-1) = 102$ ， $4n-4=96$ ， $n=25$ 個



4. 右圖每一個正方形內均有 9 個數，且相鄰的兩個正方形的數字有一定的規律性，請問由左而右的第 41 個正方形內 9 個數字之和是_____。

1	5	9	2	6	10	3	7	11
13	17	21	14	18	22	15	19	23	
25	29	33	26	30	34	27	31	35	

<解析>

第 41 個正方形

41	45	49
53	57	61
65	69	73

∴ 數字和 = $(41+73) \times 9 \div 2 = 513$ 或 $57 \times 9 = 513$ 。

5. Known n numbers $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, each of them can only take one of the three

numbers 0, -1, 2, and satisfy $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 22 \end{cases}$, then the value of

$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$ is _____.

<翻譯> 已知 n 個數 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，它們每一個數只能取 0, -1, 2 這三個數中的一個，且滿足 $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 22 \end{cases}$ ，則 $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$ 的值为_____。

<解析>

設 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 中有 a 個 -1 和 b 個 2

則可將兩式: $\begin{cases} -a + 2b = 2 \\ a + 4b = 22 \end{cases}$

$a = 6, b = 4$

∴ $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = a(-1)^3 + b \times 2^3 = -6 + 4 \times 8 = 26$

6. 梓華、玉芬、奕凱三人在甲、乙兩塊地種樹，甲地要種植 1000 棵，乙地要種植 1250 棵，已知梓華、玉芬、奕凱每天分別能植樹 20、25、30 棵樹，梓華在甲地植樹，奕凱在乙地植樹，玉芬先在甲地植樹，然後轉到乙地植樹，兩地同時開始且同時結束，玉芬在甲地植樹_____天。

<解析>

假設玉芬用 x 天在甲地，用 y 天在乙地

$$20(x+y) + 25x = 1000 \dots \textcircled{1}$$

$$30(x+y) + 25y = 1250 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \rightarrow 50(x+y) + 25(x+y) = 2250$$

$$75(x+y)=2250, x+y=30$$

$$20 \times 30 + 25x = 1000$$

$$25x = 400, x = 16$$

玉芬應該在開始後第 16 天從甲地轉到乙地。

7. 已知 $a+b=2$ ， $ab=\frac{2}{3}$ ，求代數式 $a^2b+2a^2b^2+ab^2$ 的值=_____。

<解析>

$$a^2b+2a^2b^2+ab^2 = ab(a+2ab+b) = \frac{2}{3} \times (2 + \frac{2}{3} \times 2) = \frac{20}{9}$$

8. 已知 $a^2+a^4-2=0$ ，則 $1+a+a^2+a^3+\dots+a^{2022} =$ _____。

<解析>

$$a^2+a^4-2=0 \rightarrow a^4+a^2-2=0, (a^2+2)(a^2-1)=0$$

$$\therefore a^2-1=0, a=\pm 1$$

當 $a=1$ ， $1+1+1+\dots+1=2023$ 或 當 $a=-1$ ， $1-1+1-\dots+1=1$

三、計算題(10分/10分，共 20 分) ※未寫計算過程不予計分

1. 將若干個蘋果給一群小朋友，若每個人分 1 個，則剩下 24 個蘋果；若每人所得的蘋果數為人數的 $\frac{1}{2}$ ，則蘋果剛好分完，那麼每人分 3 個，蘋果會剩下幾個？

<解析>

假設小朋友有 x 人，則蘋果有 $x \times 1 + 24$ 或 $\frac{1}{2}x \cdot x$ 個

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 = x + 24 \rightarrow x^2 = 2x + 48, x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$(x-8)(x+6) = 0$$

$$\therefore x = 8 \text{ 或 } x = -6 \text{ (不合)}$$

蘋果 $= 8 \times 1 + 24 = 32$ ， $32 - 8 \times 3 = 8$ 個。

2. 如圖，等邊三角形 ABC 的邊長為 2，點 O 為 \overline{AC} 中點，點 D 在射線上運動，以 \overline{AD} 為邊向右做等邊三角形 ADE ，連接 \overline{OE} ，求線段 \overline{OE} 的最小值？

<解析>

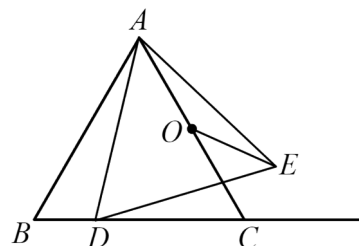
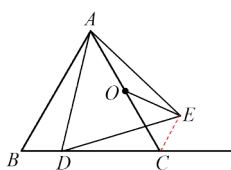
$\therefore \triangle ABC$ 為等邊三角形，點 O 為 \overline{AC} 中點

$$\therefore \overline{OC} = \frac{1}{2} \overline{AC}, \angle ABD = 60^\circ$$

$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均為等邊三角形，連接 \overline{CE}

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中

$$\textcircled{1} \overline{AB} = \overline{AC} \quad \textcircled{2} \overline{AD} = \overline{AE} \quad \textcircled{3} \angle BAD = \angle CAE$$



∴ $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS 全等)

∴ E 在與 \overline{AC} 成 60° 的射線上

當 $\overline{OE} \perp \overline{CE}$ ， \overline{OE} 的長度最小

∴ $\angle OEC = 90^\circ$ ， $\angle COE = 30^\circ$

∴ \overline{OE} 的最小值 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。