

2022 第十八屆  國際數學競賽複賽(台灣)
2022 Eighteenth International Mathematics Contest (Taiwan)

國
中
一
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：_____ 准考證號碼：_____ 試卷總分：_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！

◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	D	B	D	D	C
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	2	二	$(\frac{20}{9}, \frac{20}{9})$	25	2021	二、四	$\frac{20}{9}$	841

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. Per bottle of beverage is \$10. During the promotion period, 3 caps can be exchanged for 1 bottle of beverage. Andy takes \$200 to buy beverage. How many bottles of beverage can he drink at most? (A)27 (B)28 (C)29 (D)30

翻譯:每瓶飲料 10 元。促銷期間，3 個瓶蓋可換 1 瓶飲料。安迪花 200 元買飲料。他最多可以喝幾瓶飲料？

<解析>

$$200 \div 10 = 20$$

$$20 \div 3 = 6 \dots 2$$

$$6 \div 3 = 2$$

$$(2+2) \div 3 = 1 \dots 1$$

共喝 $20+6+2+1=29$ 瓶，選 C。

2. 咖啡廣場販售的情人套餐一份售價 165 元，而今天的情人套餐營業額為四位數 $7a9b$ ，請問咖啡廣場今天可能賣出多少份情人套餐? (A)41 (B)43 (C)45 (D)48

<解析>

165 的因數=3、5 和 11

$$7+9=a+b \text{ 且 } b=0 \text{ 或 } b=5$$

當 $b=0$ ， $a=16$ (不合)；當 $b=5$ ， $a=11$ (不合)

$$7+9=a+b+11 \rightarrow a+b=5 \text{ 且 } b=0 \text{ 或 } b=5$$

當 $b=0$ ， $a=5$ ； $b=5$ ， $a=0$

\therefore 四位數=7590 或 7095

故 $7590 \div 165 = 46$ 或 $7095 \div 165 = 43$ ，選 B。

3. 有一個五位數的最左端數字為 5，如果將最左端的數字移到最右端，而其他數字順序不變，所排成之五位數比原數大 11106，則原來的五位數是多少? (A)56789 (B)56784 (C)54321 (D)58967

<解析>

假設剩餘四位數= x ，則原數= $5 \times 10000 + x$

移動後之新數= $10x + 5$

$$10x + 5 = 50000 + x + 11106$$

$$9x = 61101$$

$$x = 6789$$

\therefore 原數=56789，選 A。

4. 某商店促銷，鞋類和衣服都打折扣：

莉莉購買一雙雪靴定價 7500 元和一件毛衣定價 4500 元，最後付了 7650 元；小凱購買一雙慢跑鞋定價 3500 元和一件運動外衣定價 1200 元，最後付了 2940 元。

請問衣服的折扣是多少? (A)四折 (B)五折 (C)六折 (D)七折

<解析>

假設鞋類折扣= a ，衣服折扣= b

$$7500a + 4500b = 7650$$

$$750a + 450b = 765$$

$$50a + 30b = 51 \rightarrow 2000a + 1200b = 2040 \dots \textcircled{1}$$

$$3500a + 1200b = 2940 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \rightarrow 1500a = 900, a = 0.6$$

$$2000 \times 0.6 + 1200b = 2040, 1200b = 840, b = 0.7, \text{選 D。}$$

5. The product of the natural numbers $a, b, c, d,$ and e is 2022, then the minimum value of the sum $a+b+c+d+e$ is _____. (A)520 (B)344 (C)235 (D)453

<翻譯> 自然數 a, b, c, d, e 的乘積是 2022，則其和 $a+b+c+d+e$ 的最小值為?

<解析>

$2022 = 2 \times 3 \times 337$ 且 五數之和要最小

故選 $1+1+2+3+337=344$ ，選 B。

6. 若 $11 + \frac{a}{b} = 11^2 \times \frac{a}{b}$ ，且 a, b 為正整數， $(a, b) = 1$ ，則 $a+b=?$ (A)125 (B)128 (C)134 (D)131

<解析>

$$11 + \frac{a}{b} = 11^2 \times \frac{a}{b} \rightarrow \frac{11b + a}{b} = \frac{121a}{b}, 11b = 120a$$

因為 $(a, b) = 1$ ， $a=11$ ， $b=120$

$\therefore a+b=11+120=131$ ，選 D。

7. 計算: $2+4+6+\dots+2022=?$ (A)1022313(B)1033212(C)1032123(D)1023132

<解析>

$$\text{原式} = 2(1+2+3+\dots+1011) = 2 \times (1+1011) \times 1011 \div 2 = 1012 \times 1011 = 1023132$$

選 D。

8. 若有理數 x 、 y 滿足 $2022(x+1)^2 + |3x-5y+8| = 0$ ，則 $x^2 + y^2 =$ _____。 (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

<解析>

$$x+1=0 \text{ 且 } 3x-5y+8=0$$

$$\therefore x=-1, y=1$$

$$\therefore x^2 + y^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2, \text{ 選 C。}$$

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 小芸和 6 位同學一起到福利社買飲料，若紅茶一杯 12 元，奶茶一杯 18 元，百香果汁一杯 22 元，每人各買一杯，三種飲料都有人買，共花了 122 元，其中有 _____ 人買百香果汁。

<解析>

假設紅茶 x 杯，奶茶 y 杯，百香果汁 $7-x-y$

$$12x+18y+22(7-x-y)=122$$

$$12x+18y+154-22x-22y=122$$

$$10x+4y=32 \rightarrow 5x+2y=16$$

$$(x, y) = (2, 3), (0, 8) \text{ 不合}$$

$$\text{故百香果汁} = 7-2-3=2 \text{ 位}$$

2. 若 $a = 0.999$ ，則點 $(a^2 - a, a^2 - a^3)$ 落在坐標平面上的第 _____ 象限。

<解析>

$$a^2 - a = a(a-1) < 0$$

$$a^2 - a^3 = a^2(1-a) > 0$$

→ $(-, +)$ 在第二象限

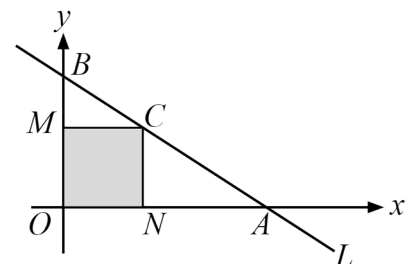
3. 在坐標平面上，直線 $L: 4x+5y=20$ 交 x 軸於 A 點，交 y 軸於 B 點，且 C 點在 \overline{AB} 上，四邊形 $CMON$ 為正方形，則 C 點的坐標為 _____。

<解析>

$$\text{令 } \overline{OM} = \overline{ON} = a \rightarrow C(a, a)$$

$$\text{代入方程式 } 4a+5a=20, a=\frac{20}{9}$$

$$\therefore C \text{ 點的坐標} = \left(\frac{20}{9}, \frac{20}{9}\right)$$



4. 等速度行駛的高鐵列車，若希望行車時間節省 20%，則應將相同距離的行車速度提高 _____ %。

<解析>

設列車原來速度為 a ，時間為 b ，後來的速度為 x

∵行車時間要節省 20%，時間為 $(1-0.2)b=0.8b$

故 $a \times b = 0.8b \times x$

∴ $x = 1.25a$ ，故行車速度需提高 25%

5. 如果 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2021}{2022}$ ，則 $n =$ _____。

<解析>

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{2021}{2022}$$

$$\therefore 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{2021}{2022} \rightarrow \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{2021}{2022}, n = 2021$$

6. If the line $L: y = kx + b$ passes through three different points $A(m, n)$, $B(n, m)$, $C(m-n, n-m)$, then the line passes through the _____ quadrant.

<翻譯>若直線 $L: y = kx + b$ 經過不同的三點 $A(m, n)$ 、 $B(n, m)$ 、 $C(m-n, n-m)$ ，則該直線經過 _____ 象限。

<解析>

$$\begin{cases} n = km + b \dots\dots\dots(1) \\ m = kn + b \dots\dots\dots(2) \\ n - m = k(m - n) + b \dots\dots(3) \end{cases}$$

由(1)-(2) $\rightarrow n - m = k(m - n)$ 代入(3)

$$\therefore b = 0 \rightarrow k = -1$$

∴ 方程為 $y = -x$ (通過第二象限及第四象限)

7. 已知 $a + b = 2$ ， $ab = \frac{2}{3}$ ，求代數式 $a^2b + 2a^2b^2 + ab^2$ 的值 = _____。

<解析>

$$a^2b + 2a^2b^2 + ab^2 = ab(a + 2ab + b) = \frac{2}{3} \times (2 + \frac{2}{3} \times 2) = \frac{20}{9}$$

8. If a positive integer a is divided by seven natural numbers 2, 3, ..., 8, and the remainders are all 1, then the minimum value of a is _____.

<翻譯>若一個正整數 a 被 2、3、.....、8 這七個自然數除，所得的餘數都為 1，則 a 的最小值是_____。

<解析>

$$[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]=840$$

$$a \text{ 最小值}=840+1=841$$

三、計算題(10分/10分，共20分) ※未寫計算過程不予計分

1. 某高速公路在坐標平面上的圖形為一直線，且方程式為 $y = -3x + 12$ ，阿明在超商的位置是 $A(6, -1)$ ，若阿明由交流道 $x = 6$ 進入此高速公路，則阿明需走幾個單位？

<解析>

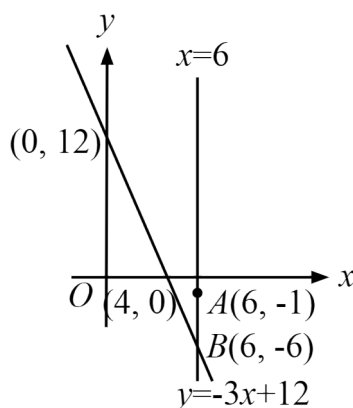
$$y = -3x + 12$$

x	4	0
y	0	12

$$x = 6 \text{ 代入 } y = -3x + 12 \rightarrow y = -6$$

$$\therefore B(6, -6)$$

$$\text{從 } A \text{ 到 } B \rightarrow \overline{AB} = |(-1) - (-6)| = 5 \text{ (單位)}$$



2. 已知 n 個數 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，它們每一個數只能取 0, -1, 2 這三個數中的一個，

$$\text{且滿足 } \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 22 \end{cases}, \text{ 則 } x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \text{ 的值為 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

<解析>

設 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 中有 a 個 -1 和 b 個 2

$$\text{則可將兩式: } \begin{cases} -a + 2b = 2 \\ a + 4b = 22 \end{cases}$$

$$a = 6, b = 4$$

$$\therefore x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = a(-1)^3 + b \times 2^3 = -6 + 4 \times 8 = 26$$