2022 第十八屆IMC國際數學競賽複賽(台灣)

2022 Eighteenth International Mathematics Contest (Taiwan)

高中二年級試卷

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：＿＿＿＿＿＿ 准考證號碼：＿＿＿＿＿＿ 試卷總分：＿＿＿＿＿＿

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！ ◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不計算成績！								
選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	B	C	D	D	A	A	A	B
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	$2+\sqrt{2}$	1	2	2036	(-1, 2)(2, -1) (0, 0)	$45°(\frac{\pi}{4})$	12, -4	3

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 若實數滿足 $0<x<1$，且 $\log_3 x-3-2\log_x 9=0$，則 $x=?$ (A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{1}{3}$ (C)$\frac{1}{4}$ (D)$\frac{1}{8}$

<解析>

$\log_3 x-3-2\log_x 9=0 \to \log_3 x-3-4\log_x 3=0$

令 $\log_3 x=t$， $\log_x 3=\frac{1}{t}$

$\therefore t-3-\frac{4}{t}=0 \to t^2-3t-4=0$， $(t-4)(t+1)=0$

$\therefore t=4$ 或 $t=-1$

當 $t=4$， $\log_3 x=4$， $x=3^4=81$(不合)

當 $t=-1$， $\log_3 x=-1$， $x=3^{-1}=\frac{1}{3}$，選 B。

2. 設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=2$，則 $\begin{vmatrix} 5a-7b & 4a+3b \\ 5c-7d & 4c+3d \end{vmatrix}=$＿＿＿＿. (A)66 (B)76 (C)86 (D)96

<解析>

$$\begin{vmatrix} 5a-7b & 4a+3b \\ 5c-7d & 4c+3d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5a-7b & 4a \\ 5c-7d & 4c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5a-7b & 3b \\ 5c-7d & 3d \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 5a-7b & a \\ 5c-7d & c \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 5a-7b & b \\ 5c-7d & d \end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix} -7b & a \\ -7d & c \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 5a & b \\ 5c & d \end{vmatrix}=4\times(-7)\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}+3\times5\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=28\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+15\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=43\times2=86$$，選 C。

3. If $|x+2|+|x-4|+|x+8|=2022$, then there is/are ＿＿＿ solution(s) in the given absolute equation. (A)4 (B)0 (C)1 (D)2

<解析>

①$x<-8$， $-(x+2)-(x-4)-(x+8)=-3x-6=2022 \to x=-676$(合理)

②$-8\le x<-2$， $-(x+2)-(x-4)+(x+8)=-x+10=2022 \to x=-2012$(不合)

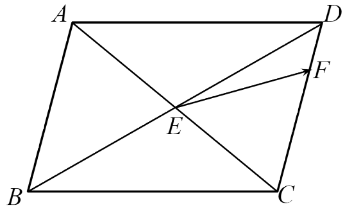
③$-2\le x<4$， $x+2-(x-4)+x+8=x+14=2022 \to x=2008$(不合)

④$x\ge4$， $x+2+x-4+x+8=3x+6=2022 \to x=672$(合理)

選 D。

4. It is known that point E is the center of the parallelogram, point F is on the side of $\overline{CD}$, $\overline{CF}=2\overline{FD}$. If $\overrightarrow{EF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$, then the pair (x, y)=?
(A) $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$ (B) $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ (C) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$ (D) $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$

已知 E 點為平行四邊形的中心，F 點在 CD 邊上，$\overline{CF}=2\overline{FD}$。若$\overrightarrow{EF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則數對(x, y)=?



<解析>

△ECD➔$\overrightarrow{EF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{ED}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{EF}=\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD})+\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}(\because\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD})$

$\therefore(x, y)=(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$，選 D。

5. 若$\tan\theta\cdot\sqrt{\csc^2\theta-1}=-1$，那麼$\theta$為第________象限. (A)第二象限、第四象限 (B) 第二象限、第三象限 (C) 第三象限、第四象限 (D) 第一象限、第四象限

<解析>

$\because \csc^2\theta-1=\cot^2\theta$

$\therefore$原式$=\tan\theta\cdot|\cot\theta|=-1$，當$\theta=\frac{3\pi}{4}$或$\theta=-\frac{\pi}{4}$

$\therefore\theta$為第二象限或第四象限，選 A。

6. 設k為實數且聯立方程式$\begin{cases}(4-k)x+6y=0\\5x+(4-2k)y=0\end{cases}$，除了(0, 0)以外，還有其他解，則$k=$______。
(A)7、-1 (B)-7、1 (C)-6、2 (D)6、-2

<解析>

$\frac{4-k}{5}=\frac{6}{4-2k}\rightarrow(4-k)(4-2k)=30$

$\therefore 16-12k+2k^2=30$，$2k^2-12k-14=0$，$k^2-6k-7=0$

$\therefore (k-7)(k+1)=0$，$k=7$或$k=-1$，選 A。

7. 已知正整數a, b和c，當$a\geq3$和$b\geq3$時，滿足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{2}$，則$c$能取的不同值的個數是多少? (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

不能同時$a>3$和$b>3$，表示$a\geq4$，$b\geq4$，$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，$c$無正整數值。

如$a=3$，$\frac{1}{3}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{2}$，$\frac{1}{c}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{b}=\frac{-b+6}{6b}$

當$b=3$、4、5，則$c=6$、12、30→c 有 3 個不同的值，選 A。

8. 空間中四點 A(4, 0, 1)，B(2, 1, -2)，C(0, 3, 4)與 D(-3, 1, 0)，則三向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$所形成的平行六面體的體積為多少? (A)62 (B)64 (C)66 (D)68

<解析>

$\overrightarrow{AB}$=(-2, 1, -3)，$\overrightarrow{AC}$=(-4, 3, 3)，$\overrightarrow{AD}$=(-7, 1, -1)

體積=$|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|$=|(12, 18, -2)·(-7, 1, -1)|=|-64|=64，選 B。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 計算$(\cos 77°+\cos 32°)^2+(\sin 77°+\sin 32°)^2$之值為________。

<解析>

原式$=1+1+2\cos(77°-32°)=2+2\cos 45°=2+\sqrt{2}$

2. 若實數x、y滿足$(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$，則x^2+y^2的最小值為________。

<解析>

圓心O' $(-5,\ 12)$，圓心O $(0,\ 0)$

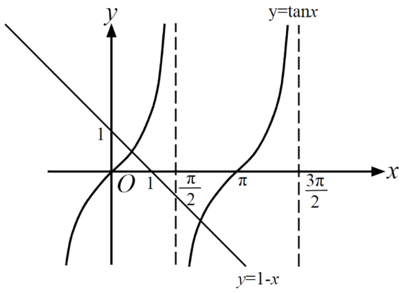
$\overline{OO'}=\sqrt{(0+5)^2+(0-12)^2}=13$，圓心$O$在圓內

故最小值=14-13=1

3. When between 0 and $\frac{3}{2}\pi$, the graph of the line $y=1-x$ and $y=\tan x$ have a total of ______ intersections.

當x介於 0 與$\frac{3}{2}\pi$之間，直線$y=1-x$與$y=\tan x$的圖形共有______個交點。

<解析>



根據圖解，得知共有 2 個交點。

4. The birthdays of Amy, Bob, and Cathy are all today. The sum of their ages is 78. The product of their ages this year is 1947 years older than the product of their ages last year. The sum of the squares of their ages this year is ________.

Amy、Bob、Cathy 三人的生日都是在今天，他們年齡的總和為 78，他們今年年齡的乘積比去年年齡的乘積大 1947 歲，請問它們今年年齡的平方和是________。

<解析>

假設 Amy、Bob、Cathy 三人年齡分別是 x 、 y 、 z

$x+y+z=78$

$xyz=(x-1)(y-1)(z-1)+1947$

$xyz=xyz-(xy+yz+xz)+x+y+z-1+1947$

$xy+yz+xz=78-1+1947=2024$

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)$

$x^2+y^2+z^2=78^2-2\times 2024=2036$

5. 求滿足 $\sqrt{a^2+b^2+2^2}=a+b+2$ 的整數解，求解(a, b)=________。

<解析>

$a^2+b^2+4=(a+b+2)^2=a^2+b^2+4+2ab+4b+4a$

$\therefore 2ab+4b+4a=0 \rightarrow ab+2b+2a=0$

$ab+2b+2a+4=4$ ， $(a+2)(b+2)=4$

a+2	1	4	2	-1	-4	-2
b+2	4	1	2	-4	-1	-2

a	-1	2	0	-3	-6	-4
b	2	-1	0	-6	-3	-4

$\therefore a=-1$ ， $b=2$ ； $a=0$ ， $b=0$ ； $a=2$ ， $b=-1$

(a, b)=(-1, 2)、(0, 0)、(2, -1)

6. 右圖是由四個邊長 1 公分的正方形組成，其中 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 皆是對角線，求 $\angle AOC$=?

<解析>

連接 $\overline{AC}$ ，△AGC 是等腰直角三角形

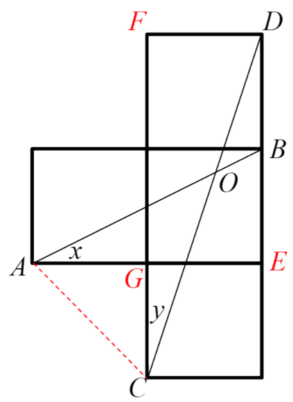
➔ $\angle GAC=\angle GCA=45°$

其中 $\tan x=\frac{1}{2}$ ， $\tan y=\frac{1}{3}$

則 $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$

➔ $x+y=45°$

$\therefore \angle AOC=180°-(45°+45°+45°)=45°$



7. 空間中 A(-3, 4, 6)，B(3, a, 8)，若 $\overline{AB}$ 在 xy 平面上之正射影長為 10，則 $a=$_______ 。

<解析>

∵A、B 在 xy 平面上之正射影坐標為

∴ A'(-3, 4, 0)， B'(3, a, 0)

∴ $\overline{A'B'}=\sqrt{(3+3)^2+(a-4)^2}=10$

➔ $36+(a-4)^2=100 \rightarrow a=12$ 或 $a=-4$

8. 若一數書寫方式如下: 先寫二位數，再寫三位數，接著寫四位數，.......以此類推，此數就像以下:

101112131415161718192021 22.........99100101102......

則自左算起第 2022 個數字為________ 。

<解析>

二位數: 99-10+1=90 個，用掉 90×2=180 個字

三位數: $\dfrac{2022-180}{3}=\dfrac{1842}{3}=614$

表示第 181 位數數字之後共可以書寫 614 個三位數，即 100、101、…、713，第 2022 個數字為 3

三、計算題(10 分/10 分，共 20 分) ※未寫計算過程不予計分

1. 已知 a、b、c 為正實數，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{9}{c}=1$，則 $a+b+c$ 的最小值為何?

<解析>

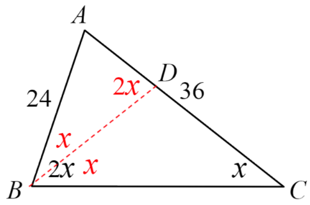
$$[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2]\cdot[(\sqrt{\frac{1}{a}})^2+(\sqrt{\frac{4}{b}})^2+(\sqrt{\frac{9}{c}})^2]\geq(\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{4}{b}}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{\frac{9}{c}})^2$$

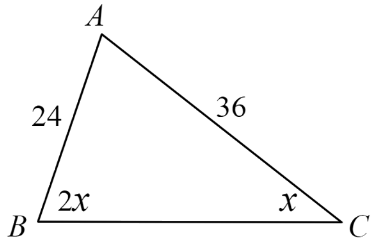
∴ $(a+b+c)\cdot(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{9}{c})\geq(1+2+3)^2$

∴ $(a+b+c)\cdot 1\geq 36 \rightarrow a+b+c$ 的最小值為 36。

2. 如圖所示，$\overline{AC}=36$，$\overline{AB}=24$，當$\angle ABC=2\angle ACB$，則(1)$\overline{BC}$=? (2)$\triangle ABC$的面積=?

<解析>





(1)作$\angle ABC$的角平分線$\overline{BD}$，交$\overline{AC}$於 D 點

△ABD、△ACB

① $\angle A=\angle A$ ② $\angle ADB=\angle ABC$

∴△ABD~△ACB(AA 相似)

假設$\overline{AD}=a$，$\overline{CD}=36-a$

$\frac{24}{a}=\frac{36}{24}$，$a=16$，故$\overline{AD}=16$，$\overline{CD}=36-16=20$

∵$\overline{BD}$為角平分線

∴$\frac{\overline{BC}}{24}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{20}{16}$，$\overline{BC}=\frac{20\times 24}{16}=30$

(2) △ABC 周長=24+36+30=90，s=90÷2=45

∴△ABC 面積=$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{45\times(45-24)(45-36)(45-30)}=135\sqrt{7}$