2022 第十八屆IMC國際數學競賽複賽(台灣)
2022 Eighteenth International Mathematics Contest (Taiwan)

高中一年級試卷

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：＿＿＿＿＿＿ 准考證號碼：＿＿＿＿＿＿ 試卷總分：＿＿＿＿＿＿

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！ ◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不計算成績！								
選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	A	C	C	C	B	D	D	A
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	2036	(-1, 2) (0, 0) 和(2, -1)	21600	$5-10\sqrt{5}$	6	$\frac{27}{2}$	$\frac{1}{24}$	6

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. If $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=a+b$, then a is natural number, $0\le b<1$, then $b=$________.
 (A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\sqrt{3}-1$ (C) $\sqrt{5}-2$ (D) $\sqrt{6}-2$

<解析>

$\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{11+2\sqrt{18}}=\sqrt{2}+\sqrt{9}=\sqrt{2}+3$

$\because 0\le b<1$

$\therefore b=\sqrt{2}-1$，選 A。

2. 泰迪上星期工作a小時，每小時工資為b元，這星期他的工作時間比上星期減少 10%，而每小時的工資提高 10%，則他這星期的工資總額與上星期相比 (A)增加 1% (B)增加 1.5% (C)減少 1% (D)減少 1.5%

<解析>

上星期的工資=ab

這星期的工資=0.9a×1.1b=0.99ab

ab-0.99ab=-0.01ab→減少 1%，選 C。

3. 試求出 $p=\frac{1}{\log_2 8}+\frac{1}{\log_3 8}+\frac{1}{\log_4 8}+\frac{1}{\log_6 8}$，則$p$的範圍是? (A) $0<p<1$ (B) $1<p<2$
 (C) $2<p<3$ (D) $3<p<4$ ($\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$)

<解析>

$$p=\frac{\log 2}{\log 8}+\frac{\log 3}{\log 8}+\frac{\log 4}{\log 8}+\frac{\log 6}{\log 8}=\frac{\log 144}{\log 8}=\frac{2\log 12}{3\log 2}=\frac{2(\log 3+2\log 2)}{3\log 2}=\frac{(0.4771+0.6020)\times 2}{0.9030}=\frac{2.1582}{0.9030}\fallingdotseq 2.39$$

選 C。

4. 過 P(-1, 6)且與圓 C: $x^2+y^2-6x-6y-7=0$相切的直線方程式為$y=m(x+1)+6$，則$m=?$
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $-\frac{4}{3}$

<解析>

(-1, 6)➔ $(-1)^2+6^2-6(-1)-6\times6-7=0$ → P 點在圓上

$x^2+y^2-6x-6y-7=0$ ➔ $(x-3)^2+(y-3)^2=25=5^2$

圓心 O 點(3, 3)，則$\overline{OP}$的斜率=$\frac{3-6}{3-(-1)}=-\frac{3}{4}$，且與切線互相垂直

故切線的斜率=$\frac{4}{3}$，則切線方程式=$y=\frac{4}{3}(x+1)+6$，選 C。

5. 已知: $f(x)=\sqrt{3x^2+1}-x\,(x\in R)$，則$f(x)$的最小值是? (A)$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{8}}{5}$

<解析>

令 $y=\sqrt{3x^2+1}-x$， $y+x=\sqrt{3x^2+1}$

$(y+x)^2=3x^2+1$ → $y^2+2xy+x^2=3x^2+1$

$\therefore 2x^2-2yx+(1-y^2)=0$

$D=(-2y)^2-4\times2\times(1-y^2)\geq0$

$4y^2+8y^2-8\geq0$

$12y^2\geq8$ → $y^2\geq\frac{2}{3}$， $y\geq\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，選 B。

6. If $|x+2|+|x-4|+|x+8|=2022$, then there is/are _____ solution(s) in the given absolute equation. (A)4 (B)0 (C)1 (D)2

<解析>

① $x<-8$ ， $-(x+2)-(x-4)-(x+8)=-3x-6=2022$ → $x=-676$ (合理)

② $-8\leq x<-2$ ， $-(x+2)-(x-4)+(x+8)=-x+10=2022$ → $x=-2012$ (不合)

③ $-2\leq x<4$ ， $x+2-(x-4)+x+8=x+14=2022$ → $x=2008$ (不合)

④ $x\geq4$ ， $x+2+x-4+x+8=3x+6=2022$ → $x=672$ (合理)

選 D。

7. 設$f(x)$為二次函數 ，且不等式$f(x)>0$之解為$-2<x<4$ ，則$f(2x-2)<0$的解為何?
(A) $-3<x<5$ (B) $x>4$或$x<-2$ (C) $0<x<3$ (D) $x>3$或$x<0$

<解析>

令 $f(x)=a(x+2)(x-4)$ ， $a<0$

$f(2x-2)<0$ → $a(2x)(2x-6)<0$

$\therefore 4x(x-3)>0$ ， $x(x-3)>0$ → $x<0$或$x>3$

選 D。

8. 已知正整數a，b和c，當$a \geq 3$和$b \geq 3$時，滿足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{2}$，則$c$能取的不同值的個數是多少? (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

不能同時$a>3$和$b>3$，表示$a \geq 4$，$b \geq 4$，$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，$c$無正整數值。

如$a=3$，$\frac{1}{3}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{2}$，$\frac{1}{c}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{b}=\frac{-b+6}{6b}$

當$b=3$、4、5，則$c=6$、12、30→c 有 3 個不同的值，選 A。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. The birthdays of Amy, Bob, and Cathy are all today. The sum of their ages is 78. The product of their ages this year is 1947 years older than the product of their ages last year. The sum of the squares of their ages this year is ________.

Amy、Bob、Cathy 三人的生日都是在今天，他們年齡的總和為 78，他們今年年齡的乘積比去年年齡的乘積大 1947 歲，請問它們今年年齡的平方和是________。

<解析>

假設甲、乙、丙三人年齡分別是x、y、z

$x+y+z=78$

$xyz=(x-1)(y-1)(z-1)+1947$

$xyz=xyz-(xy+yz+xz)+x+y+z-1+1947$

$xy+yz+xz=78-1+1947=2024$

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)$

$x^2+y^2+z^2=78^2-2\times 2024=2036$

2. 求滿足$\sqrt{a^2+b^2+2^2}=a+b+2$的整數解，求解(a, b)=________。

<解析>

$a^2+b^2+4=(a+b+2)^2=a^2+b^2+4+2ab+4b+4a$

$\therefore 2ab+4b+4a=0 \rightarrow ab+2b+2a=0$

$ab+2b+2a+4=4$，$(a+2)(b+2)=4$

a+2	1	4	2	-1	-4	-2
b+2	4	1	2	-4	-1	-2

a	-1	2	0	-3	-6	-4
b	2	-1	0	-6	-3	-4

$\rightarrow a+b+2 \geq 0$

$\therefore a=-1$，$b=2$；$a=0$，$b=0$；$a=2$，$b=-1$

(a, b)=(-1, 2)、(0, 0)、(2, -1)

3. Arrange 5 men and 3 women in a row, how many ways are there exactly two women next to each other?__________.

將 5 男 3 女排成 1 列，求恰有兩個女生相鄰的排法有多少個?

<解析>

全部的方法數-3 女全部分開-3 女全部相鄰

$=8!-5!\times P_3^6-6!\times 3!$=40320-14400-4320=21600

<另解>

$\bigcirc\ B_1\ \bigcirc\ B_2\ \bigcirc\ B_3\ \bigcirc\ B_4\ \bigcirc\ B_5\ \bigcirc$

$\quad G_1G_2 \qquad\qquad G_3$

$5!\times C_2^6\times 3!\times 2!=21600$

4. 若 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，則 $2x^4+x^3-16x-8$ 的值為__________。

<解析>

$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\rightarrow 2x+1=\sqrt{5}$，$(2x+1)^2=5$，$4x^2+4x-4=0$，$x^2+x-1=0$

$2x^4+x^3-16x-8=(2x^2-x+3)(x^2+x-1)-20x-5$

$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 代入

$\therefore -20\times\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}-5=10-10\sqrt{5}-5=5-10\sqrt{5}$

5. 滿足不等式 $5\le|2x-3|\le 9$ 的整數 x 有__________個。

<解析>

$5\le|2x-3|\le 9$

$\dfrac{5}{2}\le\left|x-\dfrac{3}{2}\right|\le\dfrac{9}{2}$

$\therefore \dfrac{5}{2}\le x-\dfrac{3}{2}\le\dfrac{9}{2}$ 或 $-\dfrac{9}{2}\le x-\dfrac{3}{2}\le-\dfrac{5}{2}$

$\therefore 4\le x\le 6$ 或 $-3\le x\le -1$

共有 6 個整數。

6. 已知關於 x 的方程 $x^2-mx+2=0$ 和 $x^2-nx+2=0$ 各有 2 個實根，且排列這 4 個實根，可組成首項為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，則 $mn=$__________。

<解析>

假設公比 $=r$

根 $=\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}r$、$\frac{1}{2}r^2$、$\frac{1}{2}r^3$

$\therefore (x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}r^3)=x^2-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r^3)x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}r^3$ 且 $(x-\frac{1}{2}r)(x-\frac{1}{2}r^2)=x^2-(\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}r^2)x+\frac{1}{2}r\times\frac{1}{2}r^2$

$\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}r^3=\frac{1}{2}r\cdot\frac{1}{2}r^2=2 \rightarrow r=2$

$\therefore mn=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r^3)(\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}r^2)=\frac{9}{2}\times3=\frac{27}{2}$

7. 已知 $\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{15}$，$\frac{bc}{b+c}=\frac{1}{17}$，$\frac{ca}{c+a}=\frac{1}{16}$，則 $\frac{abc}{ab+bc+ca}=$__________。

<解析>

$\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{15}\rightarrow\frac{a+b}{ab}=15$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=15$

$\frac{bc}{b+c}=\frac{1}{17}\rightarrow\frac{b+c}{bc}=17$，$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=17$

$\frac{ca}{c+a}=\frac{1}{16}\rightarrow\frac{c+a}{ca}=16$，$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=16$

$2\times(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=15+17+16=48$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=24\rightarrow\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{1}{24}$

8. 試求出 $10^{\log(2.43\times10^5)}$ 為__________位數。

<解析>

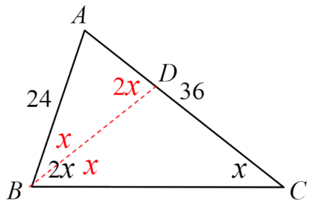
令 $x=\log(2.43\times10^5)$ ➔ $2.43\times10^5=10^x$

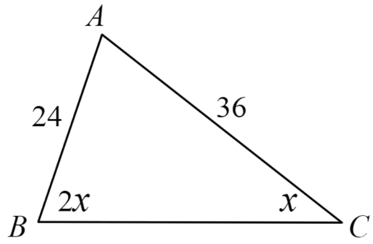
$\therefore 10^{\log(2.43\times10^5)}=10^x=2.43\times10^5 \rightarrow$ 6 位數

三、計算題(10 分/10 分，共 20 分) ※未寫計算過程不予計分

1. 如圖所示，$\overline{AC}=36$，$\overline{AB}=24$，當 $\angle ABC=2\angle ACB$，則(1) $\overline{BC}$=? (2)△ ABC 的面積=?

<解析>





(1)作 $\angle ABC$ 的角平分線 $\overline{BD}$，交 $\overline{AC}$ 於 D 點

△ABD、△ACB

① $\angle A=\angle A$ ② $\angle ADB=\angle ABC$

∴△ABD~△ACB(AA 相似)

假設 $\overline{AD}=a$，$\overline{CD}=36-a$

$\frac{24}{a}=\frac{36}{24}$，$a=16$，故 $\overline{AD}=16$，$\overline{CD}=36-16=20$

∵ $\overline{BD}$ 為角平分線

∴ $\frac{\overline{BC}}{24}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{20}{16}$，$\overline{BC}=\frac{20\times 24}{16}=30$

(2) △ABC 周長=24+36+30=90，s=90÷2=45

∴△ABC 面積= $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{45\times(45-24)(45-36)(45-30)}=135\sqrt{7}$

2. 試求級數 $C_0^{30}+2C_1^{30}+3C_2^{30}+\ldots\ldots+30C_{29}^{30}+31C_{30}^{30}$ 的和是幾位數? ($\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$)

<解析>

假設 $S=C_0^{30}+2C_1^{30}+3C_2^{30}+\ldots\ldots+30C_{29}^{30}+31C_{30}^{30}$ ………①

則 $S=31C_{30}^{30}+30C_{29}^{30}+29C_{28}^{30}+\ldots\ldots+2C_1^{30}+C_0^{30}$

$=31C_0^{30}+30C_1^{30}+29C_2^{30}+\ldots\ldots+2C_{29}^{30}+C_{30}^{30}$ ………②

①+②→ $2S=32(C_0^{30}+C_1^{30}+C_2^{30}+\ldots\ldots+C_{29}^{30}+C_{30}^{30})$

$=32\times 2^{30}$ ➔ $S=2^{34}$

$\log S=34\log 2=34\times 0.3010=10.234$，$S$ 為 11 位數。